

## Из истории науки

*Н.Н.Поляхов<sup>1</sup>, Е.Н.Поляхова<sup>2</sup>, В.В.Максимов<sup>2</sup>*

### ГИДРОМЕХАНИКА ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА: исторический экскурс

В 2007 г. мировая научная общественность отметила славный юбилей великого Эйлера – 300 лет со дня рождения; в этом 2008 г., 18 сентября, минуло 225 лет со дня его смерти. Как известно, именно в стенах только что созданной Петербургской Академии наук (полные ее названия в те годы: с момента основания – Академия наук и художеств, по регламенту 1747 г. – Императорская Академия наук и художеств) Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700–1782) и Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707–1783) начали исследования основ механики жидкости, закончившиеся основополагающими результатами, во многом определившими последующий ход развития гидромеханики.

Общий список публикаций Леонарда Эйлера огромен: в нем насчитывается около 850 работ. Его работы по механике жидкости занимают в этом списке свое достойное место и стимулируют научную мысль на протяжении вот уже двух с половиной столетий.

Леонард Эйлер впервые приехал в Санкт-Петербург в возрасте 20 лет и проработал в стенах Академии наук 14 лет. После вынужденного отъезда в Берлин в 1741 г. и продолжительной работы в Берлинской Академии наук, в 1766 г. он вновь возвращается в Санкт-Петербург, где продолжает интенсивно трудиться еще 17 лет, вплоть до своей кончины, последовавшей в 1783 г.

**1707, 15 апреля.** Леонард Эйлер родился в Базеле.

**1709, 27 июня.** Победа русских войск под Полтавой.

**1711.** В Москве Яков Вилимович Брюс (1670–1735) открывает военную Инженерную школу, которая позднее будет объединена с ранее открытой Артиллерийской школой и переведена в столицу, где в 1732 г. будет реорганизована и получит название Сухопутного Шляхетского Кадетского Корпуса, расположенного на Кадетской линии Васильевского Острова. Среди преподавателей будут в дальнейшем и Эйлер и его коллеги по Академии наук. Библиотека и архив Брюса после его смерти в 1735 г. будут перевезены в Петербургскую Академию наук.

**1714.** Гангутское морское сражение на Балтийском море.

**1715.** Г.В.Лейбниц создает Академию наук в Вене.

**1715, 1 октября.** Петр I издает указ об организации в Петербурге Морской Академии на базе переведенных из Москвы старших "навигаторских" классов Навигацкой Школы. Ее директор - Г.Г.Скорняков-Писарев издаст в 1722 г. в Петербурге первую русскую книгу по механике. Морская Академия, которая стала первым высшим военным учебным заведением в России, располагалась сначала на территории Адмиралтейства в одном из домов опального адмиралтейств-советника А.В.Кикина, отобранных в казну (сам Кикин был казнен в 1718 г. по делу царевича Алексея). В 1726 г. Академия переехала на Васильевский Остров в бывший дом князя Долгорукого в начале

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет

3-й линии. В 1752 г. она была преобразована в Морской Шляхетский Кадетский Корпус и переведена в дом фельдмаршала Миниха на набережной Невы, угол 12-й линии. В числе преподавателей Морской Академии будут в дальнейшем и Эйлер и Даниил Бернулли и многие их коллеги по Петербургской Академии наук— математики, физики, астрономы и географы.

- 1716.** Д.Бернулли защищает в Базельском университете магистерскую диссертацию.
- 1717, 16 ноября.** В Париже родился Жан Лерон Даламбер (Jean Le Rond Baptiste D'Alembert, 16.11.1717–29.10.1783), знаменитый французский математик, механик, физик, философ, член Парижской Академии наук и ее ученый секретарь (Secrétaire perpétuel) с 1741 г., почетный член Берлинской Академии наук с 1746 г., почетный член Петербургской Академии наук и художеств с 1764 г., который, в частности, внес существенный вклад в историю гидродинамики и был активным корреспондентом, а иногда и серьезным оппонентом обоих петербургских ученых – Д.Бернулли и Л.Эйлера.
- 1718.** Д.Бернулли заканчивает Базельский университет и едет изучать медицину в Гейдельберг и в Страсбург, где находится до 1720 г.
- 1719.** Парижская Академия наук утверждает свое решение избрать Петра I почетным академиком (с его согласия), о чем ему сообщает ученый секретарь Парижской Академии (с 1691 г.) писатель и ученый Бернард де Фонтенель (Bernard le Bovier de Fontenelle, 1657–1741), причем избрание царя произошло "вне всяких рангов" ("hors du tous ranks"). Благодарственную грамоту Петр I пошлет в 1721 г. с И.Д.Шумахером.
- 1720.** Леонард Эйлер (15.04.1707–18.09.1783) по желанию своего отца пастора Пауля Эйлера (1669-1745), ученика и друга знаменитого математика Якоба Бернулли (Jacob Bernoulli, 1654-1705), поступает в Базельский университет. Здесь в 1720-1725 гг. читал различные курсы лекций по математике и астрономии младший брат Якоба Иоганн I Бернулли (Johann I Bernoulli, 1667-1748). Обнаружив незаурядные способности Эйлера, И.Бернулли пригласил его к себе домой для дополнительных регулярных занятий по воскресениям вместе со своими сыновьями Николаем (Nicolaus Bernoulli, 1695-1726), Даниилом (Daniel Bernoulli, 1700-1782) и Иоганном II (Johann II Bernoulli, 1710-1790).
- 1721, февраль.** Петр I посылает своего библиотекаря Ивана Даниловича Шумахера (Johann Daniel Schumacher, 1690-1761) в Европу для вручения Парижской Академии наук благодарственной грамоты по поводу своего избрания почетным академиком, а также карт и описания Каспийского моря в качестве научного подтверждения его избрания. Одновременно Шумахеру поручено приобрести или заказать для будущей Академии наук приборы и книги (см. выше 1720 г.).
- 1721, 30 августа.** Конец Северной Войны. Россия заключает Ништатский мир со Швецией, подписывает с ней мирный договор.
- 1722, январь.** Эйлер произносит речь как оппонент на диспуте по логике.
- 1722, 9 июня.** Эйлер получает степень бакалавра искусств.
- 1723.** Л.Эйлер заканчивает факультет свободных искусств Базельского университета.
- 1724, 13 января.** Указ царя Петра I (30.05.1672-28.01.1725) об учреждении Академии наук и художеств в С.-Петербурге как государственного учреждения.
- 1724, 22 января.** Заседание Правительствующего Сената в "Зимнем Доме" (дворце) в присутствии царя Петра I с обсуждением проекта положения об Академии наук и университета и гимназии при ней по проекту Л. Блюментроста (1692-1755), будущего первого президента Академии наук. Проект "Определения об Академии", составленный Блюментростом, был исправлен и дополнен Петром I собственноручно.

- 1724, 28 января (8 февраля н.ст.).** Правительствующий Сенат утверждает именным указом Петра I об учреждении Петербургской Императорской Академии Наук ("Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana") в соответствии с обсужденным ранее планом "Определения об Академии".
- 1724, 12 февраля.** Будущий президент петербургской Академии наук Лаврентий Лаврентьевич Блюментрост (1692-1755) докладывает царю Петру I о работе по исполнению его "проекта" создания Академии наук.
- 1724, 8 июня.** Эйлер в Базельском университете произносит речь о сравнении картезианской и ньютоновской натурфилософий, за что получает степень магистра наук и искусств.
- 1725, 28 января.** Смерть Петра I (30.05.1672–28.01.1725), воцарение его жены императрицы Екатерины I (05.04.1684–6.05.1727).
- 1725, сентябрь.** Начало первых научных заседаний Академии, причем за 1725-1726 гг. было проведено 60 заседаний.
- 1725, 27 октября.** Братья Бернулли, Даниил (1700-1782) и Николай II (1695-1726), прибывают в С.-Петербург. Перед отъездом из Базеля братья Бернулли обещают Эйлеру поддержку для приглашения его в Петербургскую Академию наук.
- 1725, 2/13 ноября.** Датировка первого (из сохранившихся) протокола заседания общего академического Собрания.
- 1725, 20 ноября (7 декабря).** Екатерина I (1684-1727) своим именованием указом подтверждает повеление Петра I "о заведении" Академии наук ("мы желаем все дела, зачатые трудами Его Величества, а особливо оное, яко зело надобно делу, в пользу государственную на том же основании с Божьей помощью действительно исполнить") и о назначении лейб-медика Лаврентия Блюментроста ее президентом.
- 1726.** В лейпцигском журнале Acta Eruditorum выходит первая статья Эйлера (об изохронных траекториях в сопротивляющейся среде).
- 1726, 17 декабря.** Запись в академической канцелярии о приеме Эйлера на работу в Петербургскую Академию наук (согласно императорскому указу) и о высылке ему в Базель денег на дорогу.
- 1727, 5 апреля.** Эйлер отправляется в путь из Базеля речным кораблем до Майнца, оттуда на почтовых в Марбург для встречи со знаменитым европейским ученым Христианом Вольфом, рекомендательным письмом к которому Эйлера снабдил его учитель Иоганн I Бернулли. Через неделю после встречи Вольф пишет вдогонку Эйлеру письмо с пожеланиями успехов на службе в Петербургской Академии Наук, которую он характеризует как "рай для ученых". Эти ответственные слова были сказаны ученым, хорошо знающим научную жизнь Европы и ситуацию в петербургской Академии, в которой он уже был одним из первых почетных членов. Вольф в свое время был рекомендован Петру I Лейбником как его ученик и талантливый ученый, который может принести пользу Петербургской Академии. Осталась обширная переписка Вольфа с библиотекарем И. Д. Шумахером и другими чиновниками новой Академии в 1720-е гг.
- 1727, 6 мая.** Смерть Екатерины I (05.04.1684-06.05.1727), воцарение Петра II (12.10.1715-18.01.1730), внука Петра I, сына царевича Алексея Петровича (1690-1718).
- 1727, 24 мая.** Эйлер прибывает морем в Петербург и приступает к работе как адъюнкт кафедры физиологии под руководством Даниила Бернулли. Он остается адъюнктом до 1731 г.
- 1727.** Интерес к задачам о движении жидкости Эйлер проявил еще в юношеские годы. В августе 1727 г. Эйлер делает в петербургской Академии наук и художеств свой первый научный доклад, причем его темой является теория истечения жидкости из сосуда в одномерной постановке с использованием закона живых сил, который приме-

нялся им под влиянием работ его базельского учителя Иоганна I Бернулли. Одновременно Эйлер использовал применявшуюся уже ранее гипотезу плоских сечений и соответствующую ей форму принципа неразрывности. Этот доклад был сделан Эйлером через две недели после аналогичного доклада Даниила Бернулли, причем независимые результаты двух молодых ученых совпали. Осознавая деликатность сложившейся ситуации, Эйлер уступил право публикации результатов своему старшему другу, полностью прекратив свои собственные исследования по гидромеханике почти на четверть века. В дальнейшем именно Эйлеру в 50-х гг. XVIII столетия удастся заложить основы механики жидкости и газа. К тому времени он работал уже в Берлине.

- 1727.** Эйлер переходит адъюнктом на кафедру высшей математики Петербургской Академии под руководством Якоба Германна (Jacob Hermann, 1678-1733). В этой должности он пробудет до 1731 г.
- 1730, 18 января.** Смерть Петра II (1715–1730) в Москве, престол занимает императрица Анна Иоанновна (28.01.1693–17.10.1740), племянница Петра I, бывшая герцогиня Курляндская.
- 1731.** Эйлер избран ординарным академиком (профессором) по кафедре физики и механики в Петербургской Академии наук (он останется на этой кафедре вплоть до 1733 г.).
- 1732.** В Петербурге открывается Шляхетский Сухопутный Кадетский Корпус на Васильевском острове, вблизи Академии наук. Эйлер и его коллеги много сил отдали преподаванию математики, физики и других предметов в этом военном учебном заведении.
- 1733.** После отъезда Даниила Бернулли Эйлер становится профессором кафедры высшей математики Петербургской Академии наук и остается в этой должности вплоть до своего отъезда в Берлин в 1741 г.
- 1736.** В Турине родился Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 25.01.1736–10.04.1813).
- 1737.** Петербургская Академия наук поручает Эйлеру составить научное руководство по строению кораблей.
- 1738.** Даниил Бернулли издает в Страсбурге свою знаменитую "Гидродинамику". На титульном листе стояло: "Академический труд, составленный автором в период пребывания его в Петербурге". Эта знаменитая книга, устанавливающая кардинальную связь между гидростатикой и гидравликой, многократно докладывалась Даниилом Бернулли в Петербургской Академии наук. Методы Ньютона Д.Бернулли принял как некоторую научную эстафету, и с момента выхода его книги теоретическая гидродинамика превратилась в самостоятельную научную дисциплину. Сам термин "гидродинамика" также принадлежит Даниилу Бернулли. Получив в подарок экземпляр "Гидродинамики" Л.Эйлер высказался о ней в восторженных выражениях. Он проверяет все вычисления Д. Бернулли и в дальнейшем всегда энергично защищает принципы Д.Бернулли от несправедливых нападок и возражений критики.
- 1740.** Парижская Академия наук объявляет конкурс на работу по теории морских приливов и отливов. Работа Эйлера разделяет первую премию с работами Ж.Даламбера, К.Маклорена (Colin Maclaurin, 1698-1746) и А.Кавальери (Antoine Cevalieri, 1698-1763), французского математика, профессора в Кагоре, затем в Тулузе. Конкурсное сочинение Эйлера публикуется в Париже как "Inquisitio Physica in Causam Fluxus ac Refluxus Maris" в традиционном издании, известном под кратким названием "Prix Paris" ("Pieces qui a remporte' le Prix propose' pour l'an 1740 par l'Academie Royale des Sciences de Paris". Paris. 1741), наряду с сочинениями всех остальных лауреатов премии.

- 1740.** Эйлер сближается с французским математиком А.К.Клеро (Aristide Claude Clairaut, 1713-1765), членом Парижской Академии наук с 1731 г., который в те годы также занимался задачами механики жидкости. Даниил Бернулли, который в те годы был тесно связан с Парижской Академией (он станет ее иностранным членом в 1748 г.), выступает посредником в переписке Эйлера с Клеро.
- 1740, 17 октября.** Смерть императрицы Анны Иоанновны (28.01.1693–17.10.1740). Престол наследует Иван VI (малолетний Иоанн Антонович, 1740–1764). Наступает время регентства.
- 1741, лето.** Эйлер с семьей уезжает из Петербурга в Берлин.
- 1741, 24 ноября.** В результате дворцового переворота императрицей становится дочь Петра I Елизавета Петровна (18.12.1709–25.12.1761).
- 1742, 28 августа.** Л. Эйлер в письме из Берлина ученому секретарю Петербургской Академии Наук математику Христиану Гольдбаху (Christian Goldbach, 1690-1774) сетует на то, что ни из Парижа, ни из Дижона нет ответов о получении посланных им туда статей по механике движения жидкости в эластичной трубке (в артерии). Что касается Дижона, то только через много лет стало известно, что статью по движению крови там получили, но не опубликовали, а рукопись затерялась. Только в XIX в. эта работа была опубликована в России по материалам сохранившихся черновиков.
- 1742.** И.Бернулли (Johann I Bernoulli, 1667-1748), отец Даниила Бернулли и базельский учитель Эйлера, почетный академик Петербургской Академии наук со времени ее основания, т.е. с 1725 г., публикует в своих "Избранных сочинениях" трактат "Hydraulica, nunc primum detecta ac demonstrata ex fundamentis pure mechanica". *Johannis Bernoulli Opera Omnia Lausannae et Genevae 1742 tomus quartus.* / Русск.перевод: "Гидравлика, теперь впервые открытая и обоснованная на исключительно механической основе". В то время никто кроме Эйлера не смог по достоинству оценить новизну и перспективность общего динамического принципа Бернулли и плодотворно воспользоваться им в дальнейшем. С энтузиазмом подхватив идеи обоих Бернулли, Эйлер внес ясность и определенность в понимание и практическое использование их идей. Хотя И.Бернулли, как и его сын Д.Бернулли, в своей "Гидродинамике" 1738 г., ограничился одномерными случаями, применение этого подхода позволило ему в некоторой мере обобщить в этой книге результаты сына, остававшегося в рамках упрощенной гипотезы параллельных сечений в сочетании с законом живых сил, популярным в то время. Рассмотрение бесконечно малого элемента позволило Л.Эйлеру в дальнейшем перейти к пространственным задачам и получить знаменитые "гидродинамические уравнения Эйлера".
- 1745.** Наряду с изучением движения самих жидкостей, Эйлер занимался и проблемой сопротивления тел в жидкости. В частности, он написал обширные комментарии к изданному им в 1745 г. переводу на немецкий язык трактата "Новые начала артиллерии" английского инженера Б. Робинса (Benjamin Robins, 1707-1751). Перевод книги Б.Робинса с английского языка на немецкий Эйлер выполнил, по официальной версии, по поручению короля Фридриха II, однако уместнее предположить, что Эйлер сначала сам познакомился с этой книгой и, оценив ее научную значимость, убедил короля дать ему "поручение" перевести книгу и опубликовать перевод, снабдив его научными комментариями. Известно, что объем комментариев Эйлера в пять раз превысил объем переведенного трактата. Здесь Эйлер, по существу, выявил и решил "парадокс Даламбера", установленный Даламбером в трактате о равновесии и состоящий, как известно, в том, что в потоке идеальной жидкости, т.е. при безотрывном обтекании тела, гидродинамическое сопротивление отсутствует. При этом Эйлер снова успешно применяет "прямой" метод И.Бернулли, изложенный им впервые в "Гидравлике" в 1742 г. на основе также впервые сделанной им попытки применить

закон сохранения импульса. Эйлерово определение давления в потоке явилось завершением эволюции этого понятия. Для определения сопротивления в трубке тока Эйлер получает уравнение неразрывности плоского течения несжимаемой жидкости, которое связывает произвольное положение (координаты) элемента объема жидкости с начальными значениями координат (независимые координаты Лагранжа). В своих дополнениях и комментариях к трактату Эйлер фактически синтезирует метод Клеро с более ранними идеями Даниила Бернулли из его "Гидродинамики" 1738 г. об элементарных трубках тока. В эйлеровых комментариях можно легко усмотреть предпосылки континуальных представлений при рассмотрении обтекания тел, для чего Эйлер плодотворно использует схему линий тока.

- 1745.** Л.Эйлер применил "прямой" метод и принцип неразрывности также для вычисления скорости воды, вытекающей из вертикального сосуда, как функции высоты свободной поверхности.
- 1746, 2 июня.** Л.Эйлер в выступлении на публичном собрании Берлинской Академии наук дает похвальный отзыв о сочинении Даламбера по гидромеханике.
- 1747, январь.** Эйлер избран членом Лондонского Королевского общества.
- 1747.** Петербургская Академия наук и художеств принимает "Регламент Императорской Академии наук и художеств в Санкт-Петербурге".
- 1749.** Выходит трактат Л.Эйлера по мореплаванию "Scientia Navalis seu Tractatus de Construendis ac Dirigendis Navibus". Petropoli. 1749. Pars Prior complectens theoriam universam de situ ac motu corporum aquae innatantium. 444 p. Pars Posterior. 534 p.), заказанный ему в 1730-е гг. Петербургской Академией наук и изданный почти с десятилетним опозданием в Петербурге на средства Петербургской Академии наук (сам Эйлер работал в это время в Берлине). Переиздано как: Leonhardi Euleri Scientia Navalis. Edidit Clifford Ambrose Truesdell. Pars Prima. Caput I-VII // Opera Omnia. Ser. II. T.18. Turici. 1967. Pars Secunda. Caput I-XI. T.19. Basiliae. 1972.
- 1749.** Эйлер занимается гидротехникой в Пруссии по заданию короля Фридриха II: консультирует инженеров, проектирующих фонтаны в парке Сан-Суси в королевской резиденции в Потсдаме, обследует строительство канала между реками Хафель и Одер.
- 1752.** Выходит трактат Эйлера о "новом принципе механики", законченный им в 1750 г. (Euler L. "Decouverte d'un nouveau principe de Mecanique". Memoires Acad. Sci. et Belle-Lettres. Berlin. (1750). 1752. T.6. P.185-217 // Opera Omnia. Ser. II. T.5 (326 p.). Commentationes Mechanicae (Principia Mechanica). Edidit Joahim Otto Fleckenstein. Lausannae. 1957. P.81-108. В трактате Эйлер идет дальше по пути Иоганна Бернулли о континуальном подходе к рассмотрению элементарных объемов жидкости и решает пространственную задачу, подчеркивая, что этот принцип можно рассматривать как единственное основание всей механики. Принцип заключается в использовании выписанного в дифференциальной форме в неподвижных декартовых координатах второго закона Ньютона и в применении полученных уравнений не к материальной точке, а к бесконечно малому элементарному объему тела с введением как внешних, так и внутренних сил. При этом Эйлер не претендует на открытие новых уравнений, а лишь скромно утверждает, что он первый установил их общность применительно к элементу объема для всех типов тел. В дальнейшем именно из этого принципа Эйлер в 1755 г. выведет свои знаменитые гидродинамические уравнения континуума (опубликованы в 1757 г.). Перейдя к понятию континуума, он получит возможность ввести математический аппарат теории поля применительно к описанию поведения жидкости, благодаря чему, он преодолет важнейший барьер, который не смог преодолеть никто из его предшественников: он представит внутреннее давление жидко-

сти как величину, определенную в каждой точке ее объема, т.е. введет понятие поля давлений.

- 1752.** Эйлер фактически вывел основное уравнение теории гидродинамического потенциала для равной нулю суммы вторых производных потенциала скорости, которое впоследствии получило известность как уравнение Лапласа из теории потенциала – этим самым Эйлер заложил основы теории поля.
- 1755.** Л.Эйлер пишет три статьи по гидромеханике, в которых дает систематическое изложение математического аппарата теоретической гидродинамики для общего случая нестационарного течения сжимаемой жидкости. Они будут опубликованы в 1757 г.
- 1755, 15 июня.** Л.Эйлер избран почетным членом Парижской Академии наук.
- 1757.** Выходит трактат Эйлера "Principes generaux de l'etat d'equilibre des fluides" (Memoires Acad. Roy. Sci. et Belle-Lettres. Berlin. (1755). 1757. V.11. P.217-273. Opera Omnia. Ser. II. T.12. (Leonhardi Euleri Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Fluidorum Pertinentes. Volumen Prius, с вводящей статьей : С.А.Truesdell "Rational Fluid Mechanics 1687-1765", Editor's introduction to T.12). Edidit Clifford Ambrose Truesdell. Lausannae. 1954. (P.2-54). В нем Эйлер настаивает на том, что новый континуальный принцип механики, опубликованный им в 1752 г., нужно применять непосредственно к реальным телам, исходя из непрерывного распределения в них вещества. Континуальный принцип по Эйлеру означал, что корпускула как математическая точка является носителем трех координат. Благодаря такой точке зрения, т.е. фактически с позиций теории поля, Эйлер смог представить внутреннее давление жидкости в общем виде как величину, определенную в каждой точке объема жидкости и, таким образом, перейти к своей знаменитой системе гидродинамических переменных. Здесь Эйлер обобщил результаты Клеро и придал изложению гидроаэростатики современную форму. Он использует понятие давления, его зависимость от плотности и температуры, вводит понятие потенциала сил, указывает на неизменность давления, плотности и температуры на поверхности уровня потенциала. Он получил известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы, предложив определять температуру пропорционально давлению газа при постоянном объеме. В этой и в последующих публикациях 1757 г. Эйлер развил метод Даламбера при решении системы уравнений для составляющих скорости с помощью двух произвольных функций комплексного переменного, которые неявно принимаются аналитическими и вместе с тем принимающими действительные значения при действительных значениях аргумента.
- 1757.** Уравнения движения идеальной жидкости, лежащие в основе современной гидродинамики, Л. Эйлер излагает в своем следующем, самом существенном, мемуаре, опубликованном в том же номере: "Principes generaux du mouvement des fluides" (Mem. Acad. Sci. Berlin. (1755). 1757. V.11. P.274-315. Opera Omnia. Ser. II. T.12 (Leonhardi Euleri Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Fluidorum Pertinentes. Volumen Prius. Edidit Clifford Ambrose Truesdell. Lausannae. 1954). P.54-91 // Русск. перевод: Известия РАН (Механика жидкости и газа). 1999. Вып.6. С.26-54. ). Здесь Эйлеру удалось построить полную систему уравнений континуального движения сжимаемой жидкости и уравнение неразрывности, опираясь на "новый принцип механики". Он начинает общую постановку задач движения идеальной жидкости на базе теперь уже традиционного рассмотрения выделенного в жидкости элементарного жидкого параллелепипеда, согласно предложенному им в 1752 г. "новому принципу механики". В этой работе мы видим четкое разграничение кинематической и динамической частей. Начальное состояние жидкости, которая может быть сжатой и неоднородной, считается заданным, т. е. для определенного момента времени известны положение и скорости всех частиц жидкости и все действующие на нее силы.

Задача ставится следующим образом: в каждой точке жидкости и для каждого момента времени определить давление, плотность и скорость элемента объема, который проходит через эту точку. Эйлер дает общий вид дифференциального уравнения неразрывности (сплошности) жидкости для пространственного неустановившегося течения сжимаемой (т.е. с произвольной переменной плотностью) и несжимаемой жидкости, а затем вычисляет три компоненты ускорения элемента жидкости под действием внешней силы и внутреннего давления. К этим четырем уравнениям он добавляет пятое уравнение связи между упругостью, плотностью и параметром теплового состояния жидкости, без которого система уравнений не является замкнутой даже для несжимаемой среды. Полученные пять уравнений, считает Эйлер, "заклучают в себе всю теорию движения жидкости", переводя задачи гидромеханики из области механики в область математического анализа. Эйлер вводит потенциалы сил и скоростей, причем в этой замечательной работе он исправляет допущенную ранее и им, и Даламбером ошибку, что будто бы при движении жидкости обязательно существует потенциал скоростей. Вслед за выводом уравнений гидродинамики он вводит потенциалы сил и скоростей и получает соответствующие интегралы для несжимаемой жидкости, а также вообще для баротропных процессов (эти интегралы позднее получают название интегралов Лагранжа-Коши). Один из его примеров непотенциального движения – вихревое. К этой статье Эйлер сразу пишет продолжение "Continuation des recherches sur la theorie du mouvement des fluides" (Mem. Berlin. (1755) 1757. V.11. P.316-361. Opera Omnia. Ser. II. T.12. (см. назв. тома 12 выше, 1757 г.) P.92-132). Здесь он применяет свои общие уравнения к более частным задачам.

- 1760.** Эйлер в письме к Лагранжу от 1 января 1760 г. указывает ему выбор новых гидродинамических переменных, которые отныне будут называться "переменными Лагранжа". В 1762 г. Лагранж в Турине опубликовал это письмо Эйлера вместе с собственными сочинениями. Действительно, уравнение движения жидкости можно представить в двух системах переменных: эйлеровых и лагранжевых. Переменные Эйлера изучают движение среды с точки зрения изменения со временем всех характеристик движения (скорости, давления, плотности) в функции текущих прямолинейных координат и времени. Смещение происходит из фиксированной точки в бесконечно близкую. Для каждого частного момента времени определяется движение всех точек сразу, так как эйлеровы переменные характеризуют точки пространства, мимо которых в разные моменты времени проходят разные точки жидкости. Эйлер задает распределение скоростей всех точек в пространстве жидкости в функции времени и радиуса-вектора (континуальное поле скоростей). Переменные Лагранжа, указанные ему Эйлером, описывают начальные параметры положения точки (координаты и время), а смещение считается конечным, позволяя найти скорость и ускорение. Таким образом, переменные Лагранжа описывают непрерывную совокупность отдельных движущихся точек через радиус-вектор и его компоненты, давая как бы историю отдельной частицы на основе начальных значений параметров, т.е. определяя текущие координаты точки в функции времени и начальных условий, вычисляя затем скорости и ускорения этой частицы.
- 1761.** Эйлер публикует трактат "Principia motus fluidorum. Pars Prior." (Novi Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. (1756/1757). 1761. V.6. P.271-311. Opera Omnia. Ser. II. T.12. (см. название т.12 выше, 1757 г.) P.271-311). В этом трактате, который был написан и доложен в Берлине еще в 1752 г., но публикация которого была отложена из-за Семилетней Войны 1756-1763 гг. на территории Пруссии, Эйлер впервые дает четкое определение понятия внутреннего давления жидкости в точке – расширение "прямого" метода И. Бернулли с одномерного случая на пространственный с учетом уравнения неразрывности, записанного в эйлеровых гидродинамических переменных в



проекциях на координатные оси. Здесь он приходит к дифференциальному уравнению неразрывности для плоского течения, записанному в эйлеровых переменных, т.е. в компонентах скорости вдоль координатных осей. Из-за отложенной публикации этого доклада результаты второй из трех его статей 1757 г., относящейся к сжимаемой жидкости, оказались более общими, нежели результаты данной статьи, так как последние касались несжимаемой жидкости.

- 1761, 25 декабря.** Смерть императрицы Елизаветы Петровны (18.12.1709–25.12.1761). Императором становится ее племянник, внук Петра I, Петр III (Петр Федорович, 10.02.1728–28.06.1762, герцог Гольштинский).
- 1762, 28 июня.** В результате дворцового переворота императрицей становится Екатерина II (21.04.1729–06.11.1796), коронована в Москве в 1763 г.
- 1766.** Эйлер возвращается в Петербург из Берлина. 14 августа он подписывает купчую на дом на углу 10 линии В.О. и набережной Невы, который в петровское время строился для князя Куракина (современный адрес: наб.Лейтенанта Шмидта, 15).
- 1767.** Эйлер публикует трактат "Recherches sur le mouvement des rivieres" (Mem. Berlin. (1760). 1767. V.16. P.101-118. Opera Omnia. Ser. II. T.12 (Leonhardi Euleri Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Fluidorum Pertinentes. Volumen Prius. Edidit Clifford Ambrose Truesdell) Lausannae. 1954. P.272-290), выполненный и доложенный им еще в 1760 г. в Берлине. Здесь он дает четкое интегрирование дифференциальных уравнений плоского движения в переменных Лагранжа и приходит к интегралу Бернулли. Он отмечает, что во избежание "великого парадокса Бернулли" (от большей скорости жидкости получается меньшее сопротивление и наоборот), надо иметь в виду, что в ситуации парадокса Бернулли скорость и сопротивление сравниваются вдоль одной линии тока. Эйлер создал аналитическое описание обратной зависимости динамического напряжения среды от скорости в общем случае.
- 1768.** Эйлер начинает публикацию цикла работ по гидродинамике в виде четырех больших мемуаров, изданных в 1769-1772 гг. в Петербурге в издании "Novi Commentarii Acad. Sci. Petrop.": "Sectio prima, de statu aequilibrii fluidorum". V.13 (1768) 1769, P.305-416; "Sectio secunda, de principiis motus fluidorum". V.14 (1769) 1770, P.270-386; "Sectio tertia, de motu fluidorum lineari potissimum aquae". V.15 (1770) 1771, P.219-360; "Sectio quarta, de motu aeris in tubis". V.16 (1771) 1772. P.281-425. Эти работы изданы в : Opera Omnia. Ser. II. T.13 (Leonhardi Euleri Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Fluidorum Pertinentes. Volumen Posterius. Edidit Clifford Ambrose Truesdell) Lausannae. 1965. P.1-72, 72-153, 154-262, 262-369. Это – последние основополагающие гидродинамические работы Эйлера, фактически представлявшие собой один большой трактат в четырех частях: в них рассмотрена соответственно гидростатика, гидродинамика, гидравлика и акустика. Это было систематизированное и дополненное изложение предыдущих исследований Эйлера в соответствующих областях: здесь более полно разработана кинематика жидкостей, большее внимание уделяется субстанциальным уравнениям движения, рассмотрено потенциальное течение сжатой жидкости, точно очерчено соотношение теории и практики в гидромеханике. При этом общие уравнения гидродинамики в этих завершающих и обобщающих статьях Эйлера выводились в гидромеханических переменных Лагранжа, которые, как известно, были в 1760 г. указаны Лагранжу самим Эйлером (см. выше 1760 г.). В этих работах Эйлер заложил основы всей гидродинамики идеальной жидкости. Не обладая общим понятием тензора напряжения (Коши, 1823 г.), Эйлер не смог перейти к более сложным моделям сплошной среды – вязкой жидкости и упругого тела. Однако все остальные позиции для развития механики сплошной среды были им подготовлены. Эти статьи были позднее скомпонованы в одну книгу и переизданы в 1806 г. гидравликом Г. Брандесом на немецком языке с пояснениями и

вычислениями: L.Euler. Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung fluessiger Koerper. Uebers. mit einigen Zusaetzen von H.W.Brandes. Leipzig. 1806.

**1771, 22 мая.** Пожар в доме Эйлера. Семья временно, до восстановления дома, переезжает в "Бонов Дом", на углу 2-й Линии и Среднего пр.

**1782.** Л.Эйлер и Д.Бернулли награждаются именным подарком императрицы Екатерины II – золотыми медалями, вычеканенными в память о мире России с Турцией. Бернулли был в числе семи иностранных ученых – почетных членов Петербургской Академии Наук, – удостоенных этой медали.

**1782, 17 марта.** Смерть Даниила Бернулли в Базеле.

**1783, 7 (18) сентября.** Смерть Леонарда Эйлера в Петербурге.

Опередившие более чем на столетие требования времени континуальные представления Эйлера в гидродинамике идеальной жидкости нуждались только во введении касательного напряжения, чтобы успешно обеспечить построение всех основ классической механики сплошной среды. Однако это опережение времени привело к тому, что чисто континуальный подход, основанный на идеях Эйлера и Коши, будет последовательно развит сначала английской школой, а затем российской школой механики (в лице академика Михаила Васильевича Остроградского и созданной им Петербургской школой прикладной математики и механики) и завоеует всеобщее признание только уже в последней трети XIX столетия.

#### Литература

1. История механики с древнейших времен до конца 18 в. // Под общей ред. А.Т.Григорьяна и И.Б.Погребыцкого. М.: Наука, 1971. 296 с.
2. Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д. Даниил Бернулли. М.: Наука, 1981. 315 с.
3. Космодемьянский А. А. Очерки по истории механики. М.: Наука, 1982. 294 с.
4. Леонард Эйлер и современная наука // Материалы Международной Научной Конференции 14-17 мая 2007. СПб.: Научный центр РАН, 2007. 420 с.
5. Leonhardi Euleri Commentationes Mechanicae ad Theoriam Corporum Fluidorum Pertinentes. Ed.: Cl.Am.Truesdell. In: "Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series Secunda. Opera Mechanica et Astronomica" (in 31 T.). T.12, 13. Lausannae. 1954, 1955.