



## СОДЕРЖАНИЕ

### Статьи

<i>Семенова В.Ю., Тан Хтун Аунг.</i> Определение амплитуд качки судна в условиях мелководья на основании трехмерной теории.....	4
<i>Бестужева А.Н.</i> Пространственная задача о волновых движениях жидкости вокруг конуса.....	14
<i>Сухоруков А.Л.</i> Об использовании амортизирующих и демпфирующих устройств при подъеме груза с большой глубины в условиях волнения моря.....	22
<i>Векслер В.Я.</i> Отработка обводов подводных объектов с использованием компьютерных технологий проектирования для улучшения их гидродинамических характеристик.....	48
<i>Егоров С.К.</i> Исследование влияния удлинения корпуса на ходовые качества торпед и подводных аппаратов.....	58
<i>Лев И.Г., Виноградов Н.И., Нисневич М.З.</i> Об определении коэффициентов гидродинамического сопротивления и оценке характеристик вибрации плохообтекаемых гибких связей по данным морских испытаний.....	68
<i>Байтуганов М.В., Курносов А.А., Рудко А.А.</i> Формирование тактических решений по комплексному применению разнородных средств с учетом гидроакустической совместимости .....	85

### Конференции

Решение X Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (ГА-2010).....	92
--	----

### Из истории науки

100 лет со дня рождения И.П.Гинзбурга ( <i>Акимов Г.А., Максимов В.В.</i> ).....	96
--	----

<b>Поздравляем!</b> .....	102
---------------------------	-----

<b>Хроника</b> .....	104
----------------------	-----

Правила представления материалов в редакцию.....	109
--	-----

# CONTENTS

## Articles

- Semenova V.U., Than Htun Aung.* The Determination of the Ship Motion Amplitudes in Shallow Water by Means of the Three-Dimensional Theory..... 4

This paper describes the solution of the problem of the ship motions in regular waves in shallow water by means of the three-dimensional source technique. The unknown velocity potentials are represented with the help of the Green function of three-dimensional pulsating source. Results of the computations of surge, sway, heave, roll, pitch and yaw amplitudes for different depth parameter  $h/T$  are presented. Finally, the considerable influence of the shallow water effect on the amplitudes of different motion modes is graphically illustrated and discussed.

**Key words:** ship motions, shallow water, pulsating source, Green-function, amplitudes, depth of water.

- Bestuzheva A.N.* 3D-Problem of Wave Motion in a Fluid Around a Cone..... 14

Stationary wave motion of an ideal non-compressible fluid in a domain limited by a free surface and an infinite cone with the vertex on a free surface is considered. Wave motion is caused by the bottom movement. The problem is set for the velocity potential within the framework of the linear dispersion theory. By means of integral transforms the solution of the problem is reduced to a functional equation which has a solution in the particular cases. In assumption of smallness of angle between liquid free surface and cone surface analytic solution of the problem which contains dependencies from inclination angle is made.

**Key words:** linear dispersion theory, waves, ideal fluid, cone.

- Sukhorukov A.L.* On the Use of Shock-Absorbing and Damping Devices for Lifting Loads from Deep Waters under Various Sea States..... 22

Nowadays there is a tendency to development of ever deeper oil and gas fields due to depletion of hydrocarbon reserves onshore. Thus lots of lifting operations have to be carried out during infrastructural development of such fields. The present work, on the basis of Fourier finite integral transformation method, gives solution to the problem of lifting loads from deep waters taking into consideration wave and dissipating processes in lifting ropes. To reduce forces additional shock-absorbing and damping devices are introduced into the system. The effect of these devices on maximum forces realized in the system during the process of load lifting is currently being analysed.

**Key words:** load lifting, sea state, rope, wave process, shock-absorber, damper, integral transformations.

- Vekslyar V.Ya.* Underwater Object Outline Working-off Using Computer Design Technologies in Order to Improve Their Hydrodynamical Characteristics.... 48

Algorithm is given for development of underwater object outer architecture when design computer technologies are used based on hydrodynamic and hydroacoustic criteria for outline quality evaluation when prototype is not available. Methodology of primary design process of outline shape with choice of the qualifiers is described. Geometrical and mathematical models are developed on the basis of these qualifiers. These models assist in calculation of architectural surfaces being initial information in application programs of hydrodynamics and hydroacoustics, the main purpose is to solve variational design problems.

**Key words:** underwater object, propulsor, hydrodynamics, hydroacoustic, mathematical model.

<i>Egorov S.K.</i> Investigation of the Effect of Body of Revolution Lengthening on the Propulsion Performance of Torpedoes and Underwater Vehicles.....	58
--	----

The theoretical and numerical research of body of revolution lengthening effect on required power, conditioned by its drag coefficient and drag area, at constant velocity and the constant efficient volume are represented.

**Key words:** propulsion, the body of revolution, lengthening, specific volume of the power complex.

<i>Lev I.G., Vinogradov N.I., Nisnevich M.Z.</i> On Definition of Hydrodynamic Resistance Factors and Estimation of Vibration Characteristics of Bluff Cables According to Sea Tests.....	68
---	----

Results of data processing of sea tests of bluff cables are described. Approximation of hydrodynamic functions of loading according to aerodynamic tests is specified and values of hydrodynamic factors for straight-line 3-strands and 6-strands steel cables according to tests in water are defined at critical angles of attack. For the cables bent in a stream the empirical formulas are received, allowing to define factors of normal resistance depending on a combination of set tow-parameters. According to tension and configuration of flexible cables in a stream it is offered then to estimate some characteristics of hydroelastic vibration.

**Key words:** bluff cable, critical angles of attack, cable bent in a stream, set tow-parameters, hydroelastic vibration.

<i>Baituganov M.W., Kurnosov A.A., Rudko A.A.</i> Tactical Solutions Forming of Dissimilar Tools Complex Application Taking into Account Hydroacoustical Compatibility.....	85
---	----

Basic concepts and maintenance methods of hydroacoustic compatibility of dissimilar systems and tools that are placed on one carrier and are functionally united to solve various problems are outlined. Situational approach is suggested to control the complicated underwater object in dynamically changing signal clutter situations.

**Key words:** hydroacoustic compatibility, complex application, situated management, signal clutter situation.

УДК 629.12

© А.Л. Сухоруков

Центральное конструкторское бюро морской техники «Рубин», Санкт-Петербург  
su\_andr@yahoo.com

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АМОРТИЗИРУЮЩИХ И ДЕМПФИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ ПРИ ПОДЪЕМЕ ГРУЗА С БОЛЬШОЙ ГЛУБИНЫ В УСЛОВИЯХ ВОЛНЕНИЯ МОРЯ

В настоящее время в связи с истощением запасов углеводородного сырья на суше наблюдается тенденция к освоению все более глубоких месторождений нефти и газа. При обустройстве таких месторождений выполняется значительное количество различных спуско-подъемных операций. На основе метода конечных интегральных преобразований Фурье решается задача о подъеме груза с большой глубины с учетом волновых и диссипативных процессов в подъемном канате. Для уменьшения усилий в систему введены дополнительные амортизирующие и демпфирующие устройства. Дан анализ влияния этих устройств на максимальные усилия, реализуемые в системе в процессе подъема груза.

Ключевые слова: подъем груза, волнение моря, канат, волновой процесс, амортизатор, демпфер, интегральные преобразования.

Как правило, в расчетной судоподъемной практике предварительно натянутая упругая связь (канат) заменяется эквивалентной пружиной с заданной жесткостью. Вместе с тем для длинной связи ее инерция и конечная скорость распространения продольных упругих деформаций в ней могут влиять как на распределение усилий, так и на динамику поднимаемого объекта.

Определение усилий при подъеме груза со дна моря с использованием длинной упругой связи (каната) в условиях волнения рассматривалось ранее в работах [1, 2], однако в них не учитывалась диссипация энергии за счет сил гидродинамического сопротивления и внутреннего трения, что, естественно, не позволяло дать оценку как усилий в связи, так и максимальных перемещений объекта вблизи резонансных режимов. В работе [3] воздействие гидродинамических сил на поднимаемый объект учтено на основе так называемого метода двухволнового представления движения, разработанного О.А. Горошко [4]. Но пренебрежение силами внутреннего трения в материале каната приводит к некорректным значениям усилий и амплитуд колебаний при резонансных режимах на высших гармониках, которые при достаточно длинной связи могут иметь место. Учет сил внутреннего трения в материале каната при развитии подхода, предложенного в [3], представляется весьма затруднительным. Кроме того, во всех перечисленных работах волнение предполагалось регулярным, что, естественно, накладывает ограничение на применимость получаемых результатов. В наиболее полной постановке подобная задача рассмотрена в [5], однако сила внутреннего трения в материале каната там условно заменена внешней распределенной силой вязкого сопротивления, а введенные в систему амортизирующие и демпфирующие устройства рассматриваются лишь в предположении безынерционности связи, то есть без учета волновых процессов в длинном подъемном канате.

Для решения задачи подъема груза с учетом сил гидродинамической природы и внутреннего трения в материале каната использован метод конечных интегральных пре-

образований Фурье; предложен подход постепенного усложнения математической модели. Сначала рассмотрена задача подъема груза без учета диссипации энергии, затем производится учет силы гидродинамического сопротивления, действующей на груз, на основе метода конечных интегральных преобразований Фурье. Для решения задачи о подъеме груза без учета внутреннего трения в канате метод конечных интегральных преобразований может показаться несколько избыточным, однако все его преимущества проявляются при решении задачи в «полной постановке» с учетом как сил гидродинамического сопротивления груза, так и сил внутреннего трения в канате. На основе предложенного подхода строятся передаточные функции и определяются усилия в упругой связи при подъеме (опускании) груза в условиях нерегулярного волнения. Уменьшение динамических усилий в канате в процессе подъема груза может быть осуществлено за счет введения в систему упругого амортизатора или за счет компенсатора вертикальных перемещений. Проведен анализ влияния этих устройств на максимальные значения усилий, которые реализуются в процессе подъема груза.

### Продольные колебания в канате при спуско-подъемных операциях без учета диссипативных сил

При определении усилий и перемещений в канате в процессе спуско-подъемной операции будем предполагать, что наличие подвешенного груза не влияет на перемещение судна. Колебания точки подвеса груза в первом приближении можно задать как гармоническую функцию времени, амплитуда и частота которой определяются кинематическими параметрами судна при воздействии волнения. Пусть точка подвеса каната на судне движется по закону  $A \sin \omega t$  от регулярной качки обеспечивающего судна, а груз висит на канате длиной  $L$  (рис. 1).

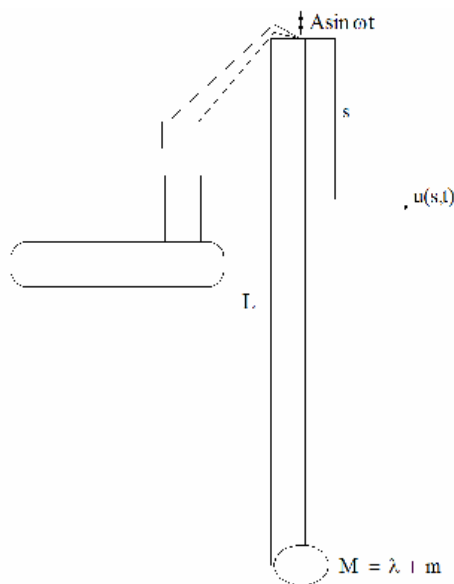


Рис. 1. Расчетная схема.

Пусть  $s$  – координата какого-либо сечения каната в начальном его положении;  $u(s, t)$  – продольное перемещение этого сечения от начального положения.

Начальное состояние каната – статически растянутое под действием сил тяжести груза и каната с учетом сил плавучести. Продольные колебания каната без учета диссипативных сил описываются волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$

где  $a = \sqrt{E/\rho}$  – скорость звука в канате, здесь  $E, [H]$  – модуль Юнга каната, равный произведению модуля Юнга материала каната на площадь поперечного сечения, занимаемого волокнами;  $\rho, [кг/м]$  – масса единицы длины каната.

Примем следующие граничные условия.

Колебания верхнего конца каната соответствуют закону движения точки крепления от качки судна:  $u(0, t) = A \sin \omega t$ . Натяжение на нижнем конце каната равно силам инерции груза. Влиянием сопротивления воды, как уже говорилось, пренебрегаем. Тогда:

$$E \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=L} = -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{s=L},$$

где  $M = m + \lambda$  – виртуальная масса груза равная сумме масс груза и присоединенной массы жидкости при вертикальных колебаниях. Вынужденные колебания системы ищем в виде:

$$u(s,t) = \left( K \cos \frac{\omega s}{a} + N \sin \frac{\omega s}{a} \right) \sin \omega t, \quad (1)$$

граничное условие на верхнем конце дает  $K = A$ . Теперь подстановка (1) во второе граничное условие приводит к соотношению для определения  $N$ :

$$E \sin \omega t \left[ -A \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega L}{a} + N \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega L}{a} \right] = M \left[ A \cos \frac{\omega L}{a} + N \sin \frac{\omega L}{a} \right] \omega^2 \sin \omega t;$$

$$N = A \frac{M \omega \cos \frac{\omega L}{a} + \frac{E}{a} \sin \frac{\omega L}{a}}{\frac{E}{a} \cos \frac{\omega L}{a} - M \omega \sin \frac{\omega L}{a}}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1) получим соотношение, определяющее перемещение сечений каната при колебаниях:

$$u(s,t) = A \sin \omega t \left\{ \cos \frac{\omega s}{a} + \sin \frac{\omega s}{a} \cdot \frac{\sin \frac{\omega L}{a} + \frac{M \omega a}{E} \cos \frac{\omega L}{a}}{\cos \frac{\omega L}{a} - \frac{M \omega a}{E} \sin \frac{\omega L}{a}} \right\}. \quad (3)$$

Динамическое приращение натяжения теперь может быть найдено на основе соотношения:  $T_{din} = E \frac{\partial u}{\partial s}$ . Тогда сила натяжения в любом сечении каната определяется как сумма статической и динамической составляющей:

$$T_{glob}(s,t) = g [m - \rho_w V + (\rho - \rho_w \Delta V_{cb})(L - s)] + E \frac{\partial u}{\partial s},$$

где  $\rho_w$  – плотность воды;  $V$  – объем груза;  $\Delta V_{cb}$  – объем воды, вытесняемый одним погонным метром каната. Статическая составляющая представляет собой разность сил тяжести и сил плавучести для груза и каната, расположенного ниже рассматриваемого сечения, а динамическая составляющая натяжения зависит от колебаний верхнего конца каната. Приведенное здесь решение является частным случаем решения [3], где на основе метода двухволнового представления движения учитывается также вклад сил гидродинамического сопротивления груза.

Рассмотрим случай обращения в ноль знаменателя в выражении (3). Обозначим  $\mu = \frac{\omega L}{a}$ , тогда будем иметь:

$$\cos \mu = \frac{M \omega a}{E} \sin \mu \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{E}{M a \omega} = \frac{EL}{M a \omega L};$$

Домножая на  $a^2$ , получим:

$$a^2 \operatorname{tg} \mu = \frac{a}{\omega L} \cdot \frac{EL}{M} \quad \text{или} \quad \mu \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{a^2} \frac{EL}{M} = \frac{\rho}{E} \frac{EL}{M} = \frac{\rho L}{M} \quad (4)$$

Выражение в правой части (4) представляет собой отношение массы каната к виртуальной массе груза. Решая уравнение (4), определим корни  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$  и, тем самым, определим спектр собственных частот системы «канат – груз»  $\omega_k = \frac{\mu_k a}{L}$  с учетом инерционных характеристик каната и волновых процессов в нем.

В частном случае, когда масса каната пренебрежимо мала по сравнению с массой груза, учитывая малость  $\mu$ , можем записать:  $\mu^2 = \frac{1}{a^2} \frac{EL}{M}$  или  $\frac{\omega L}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{EL}{M}}$ , и тогда

$\omega = \sqrt{\frac{E}{LM}}$ , что совпадает с собственной частотой системы с одной степенью свободы, в

которой упругая связь представлена в виде невесомой пружины с жесткостью  $\frac{E}{L}$ . Так как в данном случае предполагалось отсутствие диссипативных сил, при резонансных режимах в системе происходит неограниченный рост амплитуд колебаний.

Как показано в [3], учет переменности длины каната при подъеме (спуске) определяется поправкой в волновом уравнении пропорциональной  $\frac{\omega}{a} \dot{L}(t)$ . Скорости подъема (спуска) глубоководных технических средств обычно не превышают 100 м/мин (1.7 м/с), а для плавучих кранов большой грузоподъемности нескольких метров в минуту. Частота спектра волнения практически укладывается в диапазон  $< 2 \text{ с}^{-1}$ . Скорость звука в стальных канатах более 4000 м/с, а в синтетических около 500 м/с. Эти данные позволяют оценить для стальных канатов  $\frac{\omega}{a} \dot{L}(t) < 0.001$ , а для синтетических  $\frac{\omega}{a} \dot{L}(t) < 0.01$ . Таким образом, при реальных скоростях подъема можно пренебречь эффектами, связанными с изменением длины каната, и решать задачу при последовательном задании различных постоянных длин каната в процессе подъема (спуска). Гидродинамическую силу, обусловленную движением груза в толще воды с постоянной скоростью, следует учитывать в выражении для статической составляющей натяжения.

### **Использование метода конечных интегральных преобразований Фурье для расчета продольных колебаний каната с учетом сил гидродинамического сопротивления груза**

Решим задачу предыдущего пункта на основе метода конечных интегральных преобразований Фурье. Данное решение в дальнейшем будет развито с учетом сил внутреннего трения в материале каната.

Рассмотрим решение волнового уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$  при следующих граничных условиях:  $u(L, t) = \mu_1(t)$ ;  $u(0, t) = \mu_2(t)$ . С помощью замены переменной перейдем от задачи решения однородного волнового уравнения с неоднородными граничными условиями к решению неоднородного волнового уравнения с однородными граничными условиями.

$$\text{Пусть } v(s, t) = u(s, t) - \mu_1(t) \cdot \frac{s}{L} - \mu_2(t) \left(1 - \frac{s}{L}\right). \quad (5)$$

Тогда волновое уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \cdot \frac{s}{L} - \frac{d^2 \mu_2}{dt^2} \left(1 - \frac{s}{L}\right). \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет однородные граничные условия  $v(0, t) = 0$ ;  $v(L, t) = 0$ .

Домножим уравнение (6) на  $\sin \frac{p\pi}{L}s$  и проинтегрируем в пределах от 0 до  $L$ . При этом одной верхней чертой над буквой будем обозначать синус-изображение исходной функции по Фурье:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \sin \frac{p\pi}{L} s ds &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^L v \sin \frac{p\pi}{L} s ds; \\ \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \sin \frac{p\pi}{L} s ds &= -\frac{p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v}; \\ \int_0^L -\frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \cdot \frac{s}{L} \sin \frac{p\pi s}{L} ds &= \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \frac{L}{p\pi} (-1)^p; \quad \int_0^L -\frac{d^2 \mu_2}{dt^2} \cdot \frac{s}{L} \sin \frac{p\pi s}{L} ds = -\frac{d^2 \mu_2}{dt^2} \frac{L}{p\pi} (-1)^p; \\ \int_0^L -\frac{d^2 \mu_2}{dt^2} \sin \frac{p\pi s}{L} ds &= \frac{d^2 \mu_2}{dt^2} \frac{L}{p\pi} [(-1)^p - 1]. \end{aligned}$$

В итоге приходим к следующему уравнению для изображения:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dt^2} + \frac{a^2 p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v} = \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \frac{L}{p\pi} (-1)^p - \frac{d^2 \mu_2}{dt^2} \frac{L}{p\pi}. \quad (7)$$

Как и ранее, будем предполагать кинематическое возбуждение верхней точки крепления каната:  $\mu_2(t) = u(0,t) = A \sin \omega t$ . Так как собственные колебания системы «канат-груз» затухают из-за наличия диссипативных сил, будем искать установившиеся вынужденные колебания груза с частотой, соответствующей частоте возбуждения:  $\mu_1(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$ . Подставляя  $\mu_1, \mu_2$  в (7), получим:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dt^2} + \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v} = [-B_1 \omega^2 \cos \omega t - B_2 \omega^2 \sin \omega t] \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A \omega^2 \sin \omega t \frac{L}{p\pi}. \quad (8)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:  $\bar{v}(p) = D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t$ .

Подставляя это выражение в (8), получим:

$$\begin{aligned} -D_1(p) \omega^2 \cos \omega t - D_2(p) \omega^2 \sin \omega t + \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} D_1(p) \cos \omega t + \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} D_2(p) \sin \omega t = \\ = \left[ -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \right] \cos \omega t + \left[ -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] \sin \omega t \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, приходим к соотношениям для определения  $D_1(p)$  и  $D_2(p)$ :

$$D_1(p) = -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \left/ \left[ \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right] \right.; \quad D_2(p) = \left[ A - B_2 (-1)^p \right] \frac{L \omega^2}{p\pi} \left/ \left[ \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right] \right. \quad (9)$$

Применяя обратное синус-преобразование Фурье, будем иметь:

$$v(s,t) = \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] \sin \frac{p\pi s}{L}.$$



Переходя от переменной  $v$  к переменной  $u$ , получим:

$$u(s,t) = \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_1(p) \sin \frac{p\pi s}{L} \cos \omega t + \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_2(p) \sin \frac{p\pi s}{L} \sin \omega t + \frac{s}{L} B_1 \cos \omega t + \frac{s}{L} B_2 \sin \omega t + \left(1 - \frac{s}{L}\right) A \sin \omega t = R_1(s) \cos \omega t + R_2(s) \sin \omega t. \quad (10)$$

Тогда динамическая составляющая натяжения будет равна:

$$T_{din}(s,t) = E \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \frac{E}{L} A \sin \omega t + \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] \cos \frac{p\pi s}{L}, \quad (11)$$

а динамическая составляющая натяжения в точке крепления каната к грузу:

$$T_{din}(L,t) = \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \frac{E}{L} A \sin \omega t + \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t].$$

Уравнение движения груза с учетом гидродинамического воздействия воды на груз имеет вид:

$$M \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} + \beta \frac{d\mu_1}{dt} + T_{din}(L,t) = 0, \quad (12)$$

где  $\beta$  – линеаризованный коэффициент гидродинамического сопротивления груза.

Подставляя  $\mu_1(t)$ , получим:

$$-MB_1 \omega^2 \cos \omega t - MB_2 \omega^2 \sin \omega t - \beta B_1 \omega \sin \omega t + \beta B_2 \omega \cos \omega t + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \frac{E}{L} A \sin \omega t + \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] = 0. \quad (13)$$

С учетом выражений (9) будем иметь:

$$\sum_{p=1}^{\infty} p (-1)^p D_1(p) = -\frac{B_1 \omega^2 L}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2} = -\frac{B_1 \omega^2 L S_1}{\pi}, \quad (14)$$

где  $S_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2}$ ;

$$\sum_{p=1}^{\infty} p (-1)^p D_2(p) = \frac{L \omega^2 A}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{\frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2} - \frac{B_2 \omega^2 L}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2} = \frac{L \omega^2 A S_2}{\pi} - \frac{B_2 \omega^2 L S_1}{\pi}, \quad (15)$$

где  $S_2 = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{\frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2}$ .

С учетом соотношений (14), (15), выделяя в уравнении (13) коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему для определения  $B_1$  и  $B_2$ :

$$\begin{cases} \left(-M\omega^2 + \frac{E}{L} - \frac{2E}{L}\omega^2 S_1\right) B_1 + \beta\omega B_2 = 0 \\ (-\beta\omega)B_1 + \left(-M\omega^2 + \frac{E}{L} - \frac{2E\omega^2}{L} S_1\right) B_2 = \frac{EA}{L} - \frac{2E\omega^2}{L} S_2 A \end{cases}$$

Тогда  $\frac{u_{\max}(s)}{A} = \frac{\sqrt{R_1^2(s) + R_2^2(s)}}{A}$ . А на основе соотношения (11) может быть определена и максимальная динамическая составляющая натяжения для различных сечений каната:  $\frac{T_{\max din}(s)}{T_{\text{разр}}}$ . Ряды (14), (15) обладают хорошей сходимостью и при удержании даже семи членов в рядах результаты расчетов практически совпадают с результатами, полученными по методике [3], что подтверждает адекватность метода конечных интегральных преобразований Фурье для решения данной задачи.

### Учет сил внутреннего трения в канате при расчете вынужденных колебаний системы «канат – груз»

Учтем теперь в уравнениях вынужденных колебаний системы «канат-груз» силы внутреннего трения в материале каната.

Физическая природа силы внутреннего трения связана с необратимыми микропроцессами, происходящими в структурном строении материала каната и в микрообластях контакта отдельных его проволок. При продольном натяжении каната происходит более плотная упаковка проволок, и возникающие при этом местные пластические деформации и относительные сдвиги поверхностей вносят дополнительные источники рассеивания энергии при деформациях. С другой стороны, при более плотной упаковке проволок в канате затрудняется их взаимное проскальзывание, что уменьшает рассеивание энергии. Ввиду действия многих факторов точно построить функцию рассеивания энергии не представляется возможным. В данной работе для учета силы внутреннего трения использовалась гипотеза Фойгта, согласно которой сила внутреннего трения пропорциональна скорости деформации элемента каната.

Уравнение движения элемента каната с учетом сил внутреннего трения может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\mu E}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial s^2}, \quad (16)$$

где  $\mu$  – коэффициент вязкого трения в гипотезе Фойгта.

В работе [6], показано, что коэффициент  $\mu$  практически не зависит от амплитуды колебаний динамических усилий, однако в сильной степени зависит от среднего (статического) натяжения ввиду того, что при увеличении натяжения возрастает взаимное сжатие проволок каната и уменьшается их относительное проскальзывание. Согласно [6], зависимость коэффициента вязкого трения  $\mu$  от среднего растягивающего напряжения  $\sigma$  может быть аппроксимирована следующей формулой:

$$\mu = \left(0,5 + \frac{23000}{3500 + 0,75\sigma}\right) \cdot 10^{-4},$$

здесь  $\sigma$  выражается в  $\text{кг/см}^2$ . Экспериментом установлено, что с увеличением натяжения коэффициент  $\mu$  уменьшается примерно в 4-7 раз, приближаясь асимптотически к  $\mu_0$  коэффициенту вязкости для отдельной проволоки.

Как и прежде, перейдем от переменной  $u$  к переменной  $v$  с помощью соотношения (5). Тогда уравнение (16) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\mu E}{\rho} \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial s^2} - \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \cdot \frac{s}{L} - \frac{d^2 \mu_2}{dt^2} \left(1 - \frac{s}{L}\right). \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет однородные граничные условия:  $v(0, t) = 0$ ;  $v(L, t) = 0$ .

Применяя метод конечных интегральных преобразований, приходим к следующему уравнению для изображения:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dt^2} + \tilde{n} \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{a^2 p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v} = \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \frac{L}{p\pi} (-1)^p - \frac{d^2 \mu_2}{dt^2} \frac{L}{p\pi}, \quad (18)$$

где  $\tilde{n} = \frac{p^2 \pi^2 \mu E}{L^2 \rho}$ .

Подставляя в явном виде выражение для  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$ , будем иметь:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dt^2} + \tilde{n} \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{a^2 p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v} = \left[ -B_1 \omega^2 \cos \omega t - B_2 \omega^2 \sin \omega t \right] \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A \omega^2 \sin \omega t \frac{L}{p\pi}. \quad (19)$$

Уравнение (19) при фиксированном  $p$  представляет собой уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы с учетом затухания. Видим, что отношение коэффициента затухания  $\tilde{n}$  к собственной частоте системы  $\frac{ap\pi}{L}$  прямо пропорционально  $p$ . Таким образом, при учете внутреннего трения в канате высшие гармоники интенсивно затухают. Как и ранее, ищем решение для  $\bar{v}(p)$  в виде:  $\bar{v}(p) = D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t$ . Подставляя в (19), получим:

$$\begin{aligned} & -D_1(p) \omega^2 \cos \omega t - D_2(p) \omega^2 \sin \omega t + \frac{p^2 \pi^2 \mu E}{L^2 \rho} \left[ -D_1(p) \omega \sin \omega t + D_2(p) \omega \cos \omega t \right] + \\ & + \frac{E p^2 \pi^2}{\rho L^2} D_1(p) \cos \omega t + \frac{E p^2 \pi^2}{\rho L^2} D_2(p) \sin \omega t = \\ & = \left[ -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \right] \cos \omega t + \left[ -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] \sin \omega t. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений для определения  $D_1(p)$  и  $D_2(p)$ :

$$\begin{cases} a_{11}(p) D_1(p) + a_{12}(p) D_2(p) = b_1(p) \\ a_{21}(p) D_1(p) + a_{22}(p) D_2(p) = b_2(p) \end{cases},$$

где  $a_{11}(p) = a_{22}(p) = \frac{E p^2 \pi^2}{\rho L^2} - \omega^2$ ;  $a_{12}(p) = \omega \frac{p^2 \pi^2 \mu E}{L^2 \rho}$ ;  $a_{21}(p) = -\omega \frac{p^2 \pi^2 \mu E}{L^2 \rho}$ ;

$b_1(p) = -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p$ ;  $b_2(p) = -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A \omega^2 \frac{L}{p\pi}$ .

$$\text{Определитель системы: } \Delta(p) = \left[ \frac{E p^2 \pi^2}{\rho L^2} - \omega^2 \right] + \omega^2 \left[ \frac{p^2 \pi^2 \mu E}{L^2 \rho} \right]^2 \neq 0.$$

Применяя правило Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta_1(p) &= -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \left[ \frac{E p^2 \pi^2}{\rho L^2} - \omega^2 \right] - \omega \frac{p^2 \pi^2 \mu E}{L^2 \rho} \left[ -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] = \\ &= f_{11}(p) B_1 + f_{12}(p) B_2 + d_1(p) A; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(p) &= \left[ -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] \left[ \frac{E p^2 \pi^2}{\rho L^2} - \omega^2 \right] + \omega \frac{p^2 \pi^2 \mu E}{L^2 \rho} \left[ -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \right] = \\ &= f_{21}(p) B_1 + f_{22}(p) B_2 + d_2(p) A. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда: } D_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} B_2 + \frac{d_1(p)}{\Delta(p)} A; \quad (20)$$

$$D_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} B_2 + \frac{d_2(p)}{\Delta(p)} A. \quad (21)$$

Как и ранее, применяя обратное синус-преобразование Фурье будем иметь:

$$v(s, t) = \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] \sin \frac{p\pi s}{L}, \quad (22)$$

и перемещения в канате определяются согласно (10).

Тогда динамическая составляющая натяжения будет равна:

$$\begin{aligned} T_{din}(s, t) &= E \frac{\partial u}{\partial s} + \mu E \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = E \frac{\partial v}{\partial s} + E \frac{\mu_1(t)}{L} - E \frac{\mu_2(t)}{L} + \mu E \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} + \frac{\mu E}{L} \frac{d\mu_1}{dt} - \frac{\mu E}{L} \frac{d\mu_2}{dt} = \\ &= \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \frac{E}{L} A \sin \omega t + \\ &+ \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi \omega}{L} [-D_1(p) \sin \omega t + D_2(p) \cos \omega t] \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{\mu E}{L} [-B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t] - \frac{\mu E}{L} A \omega \cos \omega t, \end{aligned}$$

а динамическая составляющая натяжения в точке крепления каната к грузу:

$$\begin{aligned} T_{din}(L, t) &= \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \frac{E}{L} A \sin \omega t + \\ &+ \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi \omega}{L} [-D_1(p) \sin \omega t + D_2(p) \cos \omega t] + \frac{\mu E}{L} [-B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t] - \frac{\mu E}{L} A \omega \cos \omega t \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя  $\mu_1(t)$  в уравнение движения груза (12), получим:

$$\begin{aligned} &-MB_1 \omega^2 \cos \omega t - MB_2 \omega^2 \sin \omega t - \beta B_1 \omega \sin \omega t + \beta B_2 \omega \cos \omega t + \\ &+ \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \frac{E}{L} A \sin \omega t + \\ &+ \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi \omega}{L} [-D_1(p) \sin \omega t + D_2(p) \cos \omega t] + \frac{\mu E}{L} [-B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t] - \frac{\mu E}{L} A \omega \cos \omega t = 0 \end{aligned}$$

или с учетом выражений (20), (21):

$$\begin{aligned}
 & -MB_1\omega^2\cos\omega t - MB_2\omega^2\sin\omega t - \beta B_1\omega\sin\omega t + \beta B_2\omega\cos\omega t + \\
 & + \frac{E}{L}[B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t] - \frac{E}{L}A\sin\omega t + \frac{2E\pi}{L^2}\cos\omega t \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \left[ \frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} B_2 + \frac{d_1(p)}{\Delta(p)} A \right] + \\
 & + \frac{2E\pi}{L^2}\sin\omega t \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \left[ \frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} B_2 + \frac{d_2(p)}{\Delta(p)} A \right] - \\
 & - \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2}\sin\omega t \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \left[ \frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} B_2 + \frac{d_1(p)}{\Delta(p)} A \right] + \\
 & + \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2}\cos\omega t \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \left[ \frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} B_2 + \frac{d_2(p)}{\Delta(p)} A \right] + \\
 & + \frac{\mu E}{L}[-B_1\omega\sin\omega t + B_2\omega\cos\omega t] - \frac{\mu E}{L}A\omega\cos\omega t = 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Выделяя в уравнении (24) коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему для определения  $B_1$  и  $B_2$ :

$$\begin{cases}
 -MB_1\omega^2 + \beta B_2\omega + \frac{E}{L}B_1 + \frac{2E\pi}{L^2}B_1 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} + \frac{2E\pi}{L^2}B_2 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} + \frac{2E\pi}{L^2}A \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{d_1(p)}{\Delta(p)} + \\
 + \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2}B_1 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} + \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2}B_2 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} + \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2}A \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{d_2(p)}{\Delta(p)} + \frac{\mu E B_2\omega}{L} - \frac{\mu E A\omega}{L} = 0 \\
 -MB_2\omega^2 - \beta B_1\omega + \frac{E}{L}B_2 - \frac{E}{L}A + \frac{2E\pi}{L^2}B_1 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} + \frac{2E\pi}{L^2}B_2 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} + \frac{2E\pi}{L^2}A \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{d_2(p)}{\Delta(p)} - \\
 - \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2}B_1 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} - \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2}B_2 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} - \frac{2\mu E\pi\omega A}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{d_1(p)}{\Delta(p)} - \frac{\mu E\omega B_1}{L} = 0
 \end{cases}$$

Определив  $B_1$  и  $B_2$ , можно построить зависимости максимальных перемещений в канате  $\frac{u_{\max}(s)}{A} = \frac{\sqrt{R_1^2(s) + R_2^2(s)}}{A}$  и максимальной динамической составляющей натяжения  $\frac{T_{\max din}(s)}{T_{\text{разр}}}$  для различных сечений каната в зависимости от частоты возбуждения  $\omega$ . Здесь:

$$u_{\max}^2(s) = R_1^2(s) + R_2^2(s) = \left[ \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_1(p) \sin \frac{p\pi s}{L} + \frac{s}{L} B_1 \right]^2 + \left[ \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_2(p) \sin \frac{p\pi s}{L} + \frac{s}{L} B_2 + \left(1 - \frac{s}{L}\right) A \right]^2; \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\max din}^2(s) = & \left[ \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} D_1(p) \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{E}{L} B_1 + \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi\omega}{L} D_2(p) \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{\mu E}{L} B_2\omega - \frac{\mu E}{L} A\omega \right]^2 + \\
 & + \left[ \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} D_2(p) \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{E}{L} B_2 - \frac{E}{L} A - \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi\omega}{L} D_1(p) \cos \frac{p\pi s}{L} - \frac{\mu E}{L} B_1\omega \right]^2.
 \end{aligned} \tag{26}$$

В качестве примера рассматривался стальной канат  $\frac{3}{4}$  дюйма  $6 \times 19$  ( $7 \times 7$  IWRC) с погонной массой  $\rho = 1.59$  кг/м, модулем упругости  $E = 1.97 \cdot 10^7$  Н и разрывным усилием  $T_{\text{разр}} = 150$  кН. Амплитуда колебаний точки подвеса на судне принималась  $A = 0.2$  м. Предполагалось, что виртуальная масса груза  $M = 1000$  кг. Линеаризованный коэффициент гидродинамического сопротивления груза определялся из условия равенства ра-

бот, совершаемых силами квадратичного и линейного гидродинамического сопротивления груза за один период колебаний [2]:

$$\beta = \frac{4}{3\pi} \rho_w c_s S_g A \omega,$$

где  $c_s$  – коэффициент квадратичного гидродинамического сопротивления груза (принимался равным 1);  $S_g$  – площадь груза в плане принималась 0.5 м. На рис. 2-4 представлены зависимости безразмерных максимальных перемещений сечений каната  $\frac{u_{\max}(s)}{A}$  и безразмерных максимальных динамических составляющих усилий по длине каната в зависимости от частоты возбуждения для канатов длиной  $L = 3000, 1500$  и  $300$  м соответственно.

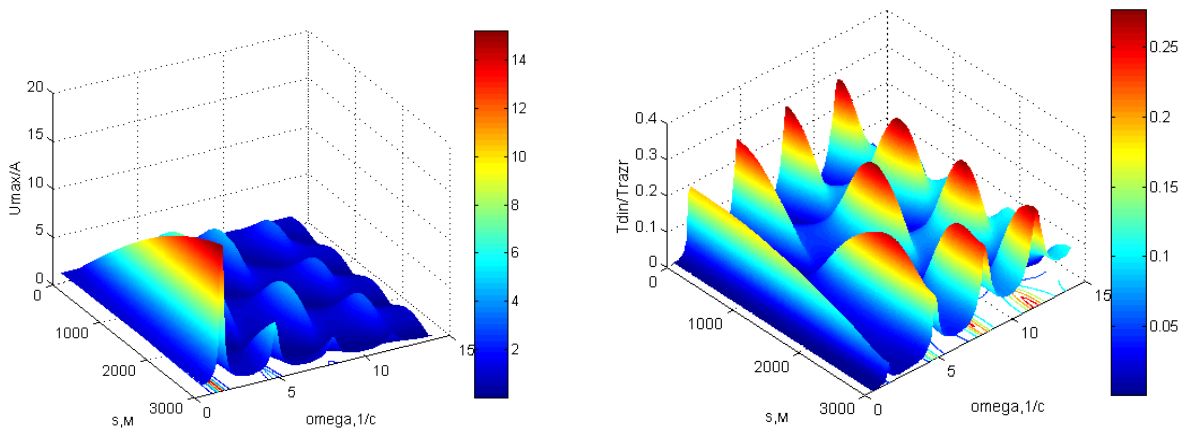


Рис. 2. Безразмерные максимальные перемещения и усилия в канате при  $L = 3000$  м.

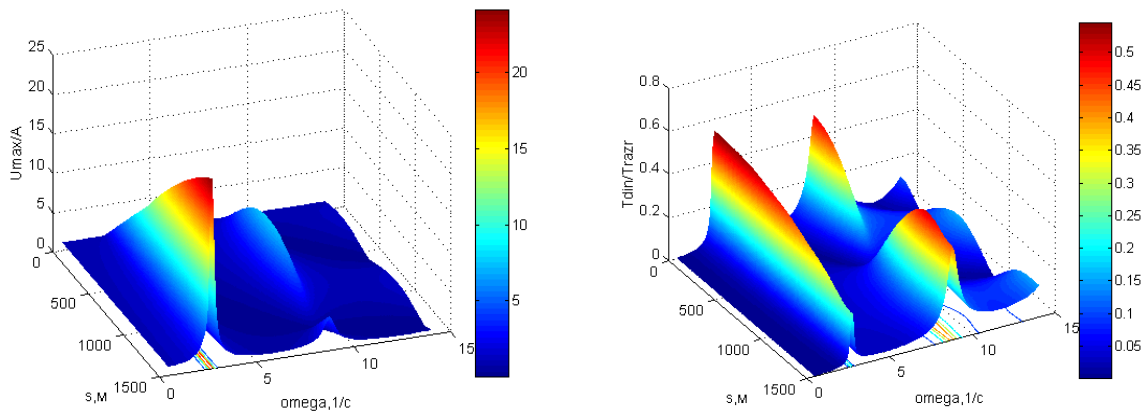


Рис. 3. Безразмерные максимальные перемещения и усилия в канате при  $L = 1500$  м.

Видно, что по мере увеличения длины каната увеличивается число резонансных режимов в заданном интервале частот возбуждения и наблюдается тенденция смещения высших собственных частот системы к частотам спектра морского волнения. Силы внутреннего трения в канате значительно подавляют резонансные режимы на высших гармониках. Так, для  $L = 3000$  м значение максимальной динамической составляющей натяжения в канате составляет около  $1/4$  от разрывного усилия (см.рис. 2), в то время как без учета сил внутреннего трения при прочих равных условиях значение максимальной динамической составляющей натяжения превышает максимальное разрывное усилие более чем в два раза. По мере уменьшения длины каната (см.рис. 3, 4) происходит увеличение максимальных перемещений и максимальных динамических усилий при ре-

зонансных режимах. Так, при  $L = 300$  м максимальное динамическое натяжение при резонансе на основной собственной частоте более чем в два раза превышает разрывное усилие каната.

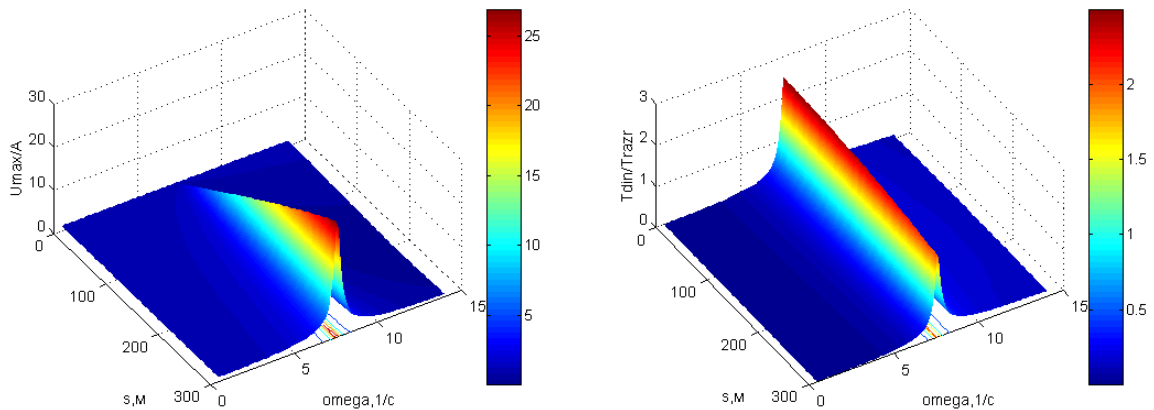


Рис. 4. Безразмерные максимальные перемещения и усилия в канате при  $L = 300$  м.

На рис. 5, 6 представлены графики изменения безразмерных максимальных динамических усилий в канате по мере изменения его длины при заданных частотах возбуждения.

Графики на рис. 5 позволяют сделать вывод о том, что для заданных параметров при реализуемых на практике частотах возбуждения ( $\omega \leq 2 \text{ c}^{-1}$ ) система находится или в дорезонансной области или имеет место резонанс на основной собственной частоте, при этом максимальное динамическое усилие не превышает разрывного усилия каната. По мере увеличения частоты возбуждения (см. рис. 6) наблюдается превышение максимального динамического усилия над разрывным при резонансе на основной собственной частоте, а также (для  $\omega = 4 \text{ c}^{-1}$ ) появление резонансного режима на второй собственной частоте системы.

Частотное уравнение (4) позволяет дать предварительную оценку возможного количества резонансных режимов при заданных параметрах системы. Запишем (4) в виде:

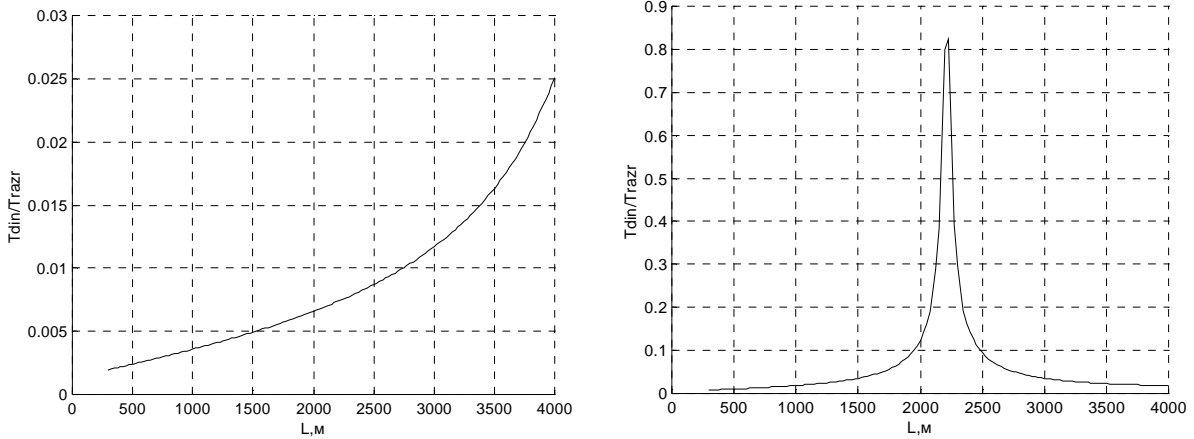
$$\frac{\omega L}{a} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{a} = \frac{\rho L}{M}.$$

Корни этого уравнения по мере уменьшения (увеличения) длины каната должны располагаться между асимптотами функции  $\operatorname{tg}$ , то есть в интервалах между точками

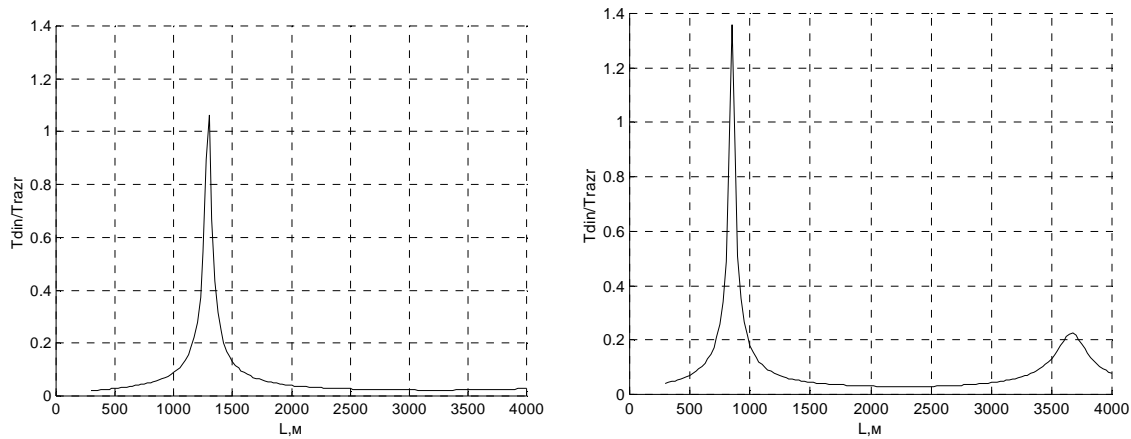
$$L = [0, \frac{a\pi}{2\omega}, \frac{3a\pi}{2\omega}, \frac{5a\pi}{2\omega}, \dots].$$

С учетом этого возможна следующая предварительная оценка

количества собственных частот системы:  $k < \frac{L\omega}{a\pi} - \frac{1}{2}$ . При  $k < 1$  имеется одна собственная частота; при  $k < 2$  – не более двух собственных частот; при  $k < 3$  – не более трех собственных частот системы «канат-груз» и т.д. Таким образом, при использовании синтетических канатов, за счет значительно меньшей скорости звука в них по сравнению со стальными, при прочих равных условиях происходит значительное увеличение количества резонансных режимов по мере уменьшения (увеличения) длины каната. Однако основное влияние на значения максимальных динамических усилий при резонансах здесь также будут оказывать силы внутреннего трения в материале каната.



**Рис. 5.** Максимальные безразмерные усилия в канате при подъеме груза:  
слева -  $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$ ; справа -  $\omega = 2 \text{ c}^{-1}$ .



**Рис. 6.** Максимальные безразмерные усилия в канате при подъеме груза:  
слева -  $\omega = 3 \text{ c}^{-1}$ ; справа -  $\omega = 4 \text{ c}^{-1}$ .

### Определение усилий в канате при подъеме (опускании) груза в условиях нерегулярного волнения

Рассмотрим теперь решение задачи о подъеме (опускании) груза с большой глубины моря в условиях нерегулярного волнения. Судно на нерегулярном морском волнении совершает нерегулярную качку. Общепринятой является модель качки, рассматривающая преобразование входного процесса (волнения) с помощью динамической системы (судна). Все виды качки судна представляют собой выходной процесс динамической системы, на вход которой подается воздействие в виде стационарного случайного процесса. В рамках линейной теории качающееся судно сводится к стационарной линейной системе. Так как волнение является нормальным стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием, то любой вид качки как выходной процесс в стационарной линейной системе представляет собой нормальный случайный процесс, который полностью определяется единственной характеристикой – дисперсией.

Расчет вероятностных характеристик качки по заданным вероятностным характеристикам волнения выполняется на основании формулы:

$$S_A(\omega) = \left| \Phi_{\zeta \rightarrow A}(i\omega) \right|^2 S_{\zeta}(\omega),$$



где  $S_{\zeta}(\omega)$  – спектральная плотность входного процесса (волнения);  $S_A(\omega)$  – спектральная плотность выходного процесса (в нашем случае колебаний точки подвеса);

$|\Phi_{\zeta \rightarrow A}(i\omega)| = \left| \frac{A(\omega)}{r} \right|$  – модуль передаточной функции, определяемый как отношение

амплитуд выходного процесса (колебаний точки подвеса) к амплитуде волнения (входного процесса). Дисперсия выходного процесса определяется по формуле:

$$D_A = \int_0^{\infty} S_A(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} |\Phi_{\zeta \rightarrow A}(i\omega)|^2 S_{\zeta}(\omega) d\omega.$$

Таким образом, при заданной спектральной плотности морского волнения для определения спектральной плотности колебаний точки подвеса необходимо построение передаточной функции  $|\Phi_{\zeta \rightarrow A}(i\omega)|$ , что требует решения соответствующих уравнений движения судна на регулярном волнении или проведения экспериментальных исследований. Вместе с тем, так как в математической модели рассматриваются лишь вертикальные перемещения точки подвеса, возможен приближенный метод определения спектральной плотности колебаний точки подвеса. Необходимость приближенного (аналитического) представления какого-либо вида качки возникает на практике достаточно часто для успешной разработки или настройки различного рода автоматических устройств или систем управления судном. При этом обычно проектировщикам устройств задают амплитуды качки 3 % обеспеченности. Воспользуемся аналитическим выражением для спектра качки в форме Н.Н. Рахманина [2, 7]. В этом случае спектральная плотность колебаний точки подвеса определяется по формуле:

$$S_A(\omega) = \frac{2D_A\alpha}{\pi} \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2a^2\omega^2 + b^4}, \quad (27)$$

где  $a^2 = \alpha^2 - \tilde{\beta}^2$ ,  $b^2 = \alpha^2 + \tilde{\beta}^2$ ,  $\alpha = 0.21\tilde{\beta}$ . Между средним периодом колебаний  $\bar{T}_A$  и параметром  $\tilde{\beta}$  существует зависимость  $\bar{T}_A = \frac{2\pi}{\tilde{\beta}}$ . Для вычисления спектра качки необходимо

по заданному значению амплитуды 3 % обеспеченности  $A_{03}$  определить дисперсию  $D_A$  на основе соотношения  $A_{03} = 2.64\sqrt{D_A}$ , а затем воспользоваться соотношением (27).

Будем считать теперь входным процессом колебания точки подвеса, а выходным процессом – перемещения сечений каната или динамические усилия в сечениях при заданной длине каната. Так как колебания точки подвеса являются нормальным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием, а система «канат – груз» является линейной, то выходной процесс – колебания сечений каната или колебания динамической составляющей натяжения в сечениях каната – также является нормальным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием, который полностью определяется единственной характеристикой – дисперсией. Таким образом, остаются справедливыми приведенные выше соотношения, связывающие спектральные плотности входного и выходного процессов:

$$D_{u_{\max}}(s) = \int_0^{\infty} |\Phi_{A \rightarrow u_{\max}(s)}(i\omega)|^2 S_A(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} |\Phi_{A \rightarrow u_{\max}(s)}(i\omega)|^2 |\Phi_{\zeta \rightarrow A}(i\omega)|^2 S_{\zeta}(\omega) d\omega;$$

$$D_{T_{din}}(s) = \int_0^{\infty} |\Phi_{A \rightarrow T_{din}(s)}(i\omega)|^2 S_A(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} |\Phi_{A \rightarrow T_{din}(s)}(i\omega)|^2 |\Phi_{\zeta \rightarrow A}(i\omega)|^2 S_{\zeta}(\omega) d\omega.$$

Метод определения модулей передаточных функций  $|\Phi_{A \rightarrow u_{\max}(s)}(i\omega)| = \left| \frac{u_{\max}(\omega, s)}{A} \right|$  и  $|\Phi_{A \rightarrow T_{din}(s)}(i\omega)| = \left| \frac{T_{din}(\omega, s)}{A} \right|$  изложен выше. На рис. 2-4 были приведены графики модулей передаточной функции  $|\Phi_{A \rightarrow u_{\max}(s)}(i\omega)|$  при фиксированных длинах каната 3000, 1500 и 300 м соответственно.

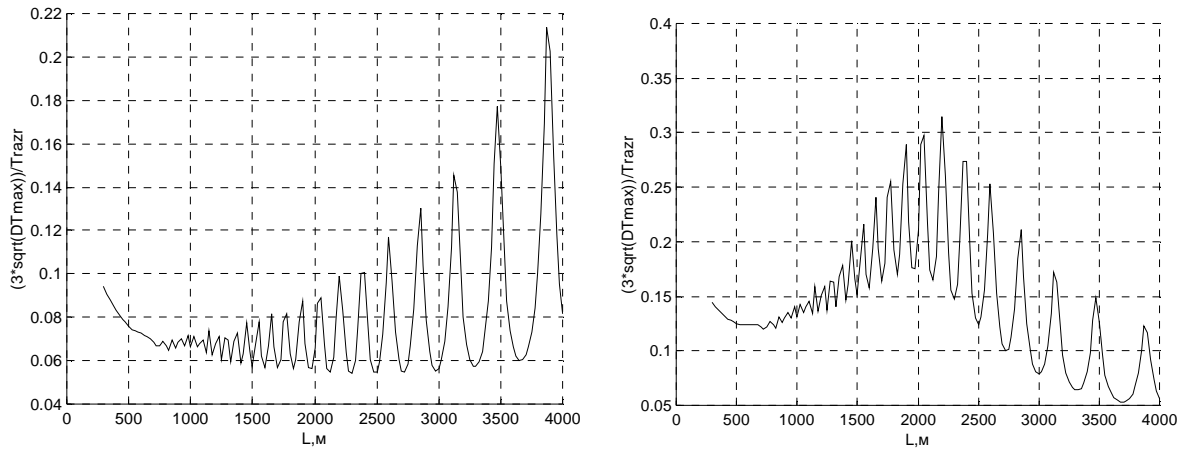
Определив дисперсии перемещений сечений  $D_{u_{\max}}(s)$  и максимальной динамической составляющей натяжения  $D_{T_{din}}(s)$  в сечениях каната можно определить максимальные перемещения и динамические усилия, которые реализуются в заданном сечении каната с любой наперед заданной вероятностью. В частности, по правилу «трех стандартов» определим максимальные перемещения и усилия в заданном сечении каната с вероятностью 0.997:

$$T_{din}^{0.997}(s) = 3\sqrt{D_{T_{din}}(s)}; u_{\max}^{0.997}(s) = 3\sqrt{D_{u_{\max}}(s)}.$$

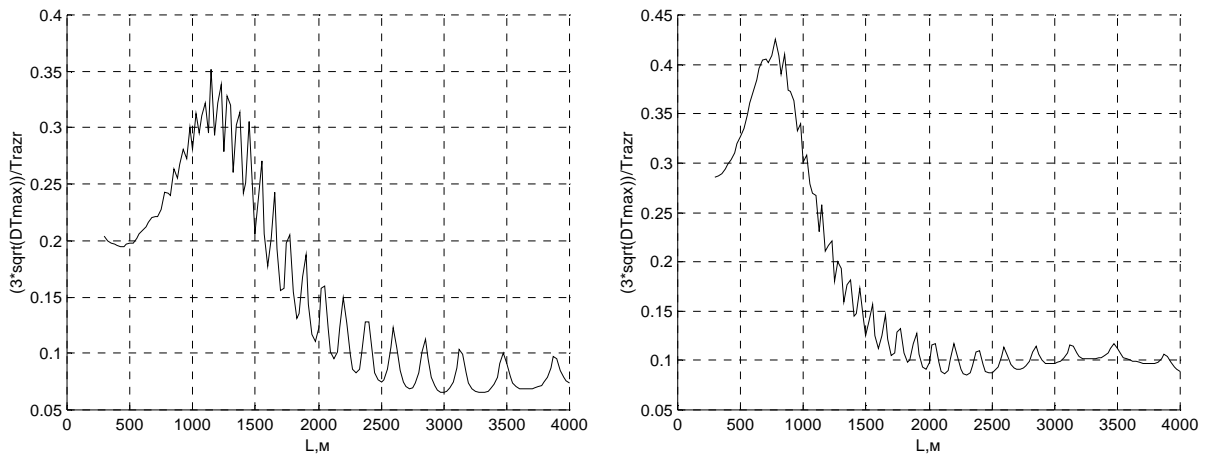
Выбрав по длине каната значения  $T_{din\max} = \max_{0 \leq s \leq L} T_{din}^{0.997}(s)$ ,  $u_{\max} = \max_{0 \leq s \leq L} u_{\max}^{0.997}(s)$ , получим максимальные значения перемещений и усилий в сечениях, которые реализуются в канате заданной длины. Изменяя длину каната  $L$ , можем определить с вероятностью 0.997 (или любой другой наперед заданной вероятностью) максимальные перемещения и динамические составляющие усилий, которые реализуются в канате в процессе подъема (опускания) груза в условиях нерегулярного волнения.

В качестве примера на рис. 7, 8 приведены максимальные (с вероятностью 0.997) динамические усилия, которые реализуются в канате для системы с рассмотренными выше параметрами, отнесенные к разрывному усилию. В качестве исходных данных задавались амплитуда 3 % обеспеченности колебаний точки подвеса  $A_{03} = 0.2$  м. Средние частоты спектра колебаний точки подвеса  $\tilde{\beta}$  выбирались равными 1, 2, 3 и 4 с<sup>-1</sup> соответственно. Для спектральной плотности колебаний точки подвеса на судне использовалось аналитическое выражение (27). Представленные исходные данные позволяют сопоставить максимальные усилия, возникающие в канате при подъеме груза в условиях регулярного (см.рис. 5, б) и нерегулярного волнения (см.рис. 7, 8).

Наблюдается тенденция уменьшения значений резонансных пиков в условиях нерегулярного волнения, вместе с тем уровень динамических усилий вдали от резонанса оказывается большим, чем в условиях регулярного волнения. Таким образом, основные выводы относительно максимальных динамических усилий, возникающих в канате при подъеме (опускании) груза, согласуются с положениями теории качки судов на нерегулярном волнении, а именно: максимальные динамические усилия, которые возникают в канате при подъеме груза, соответствуют случаю резонанса на регулярном волнении. Поэтому, если система «канат-груз» способна выдержать резонансный режим колебаний, никаких дополнительных исследований о нерегулярности волнения можно не производить. Однако многие системы в реальных условиях работают вдали от резонанса. Такие системы нет смысла проектировать с учетом возможного попадания в резонанс. В этих условиях необходимо производить расчет усилий в подъемном канате в условиях нерегулярного волнения.



**Рис. 7.** Максимальные безразмерные усилия в канате при подъеме груза в условиях нерегулярного волнения: слева -  $\tilde{\beta} = 1 \text{ c}^{-1}$ ; справа -  $\tilde{\beta} = 2 \text{ c}^{-1}$ .



**Рис. 8.** Максимальные безразмерные усилия в канате при подъеме груза в условиях нерегулярного волнения: слева -  $\tilde{\beta} = 3 \text{ c}^{-1}$ ; справа -  $\tilde{\beta} = 4 \text{ c}^{-1}$ .

### Использование упругого амортизатора при подъеме груза

Одним из наиболее простых способов уменьшения динамических усилий в канате в процессе подъема груза является введение упругого амортизатора (упругой вставки) между канатом и грузом с жесткостью меньшей, чем жесткость несущего каната. В качестве амортизатора часто используется вставка из синтетического материала. Если рассматривать канат малой длины и не учитывать волновые процессы, связанные с распространением продольных деформаций в нем, то жесткость каната определяется как

$c_l = \frac{E_m S}{L} = \frac{E}{L}$ , здесь  $E_m$  – модуль упругости материала каната;  $S$  – площадь сечения, занимаемая проволоками в канате;  $L$  – выпущенная длина каната в ненапряженном состоянии. Пусть  $c$  – жесткость упругого амортизатора ( $c < c_l$ ), тогда обобщенная жест-

кость системы «канат-амортизатор»:  $c_o = \frac{c_l c}{c_l + c} < c_l$ . Очевидно, что при сходных пере-

мещениях точки подвеса и груза динамические усилия в канате для системы с меньшей жесткостью будут меньше. Кроме того, использование амортизатора позволяет отстроить

систему от так называемого «резонансного барьера» [8], через который проходит система в процессе подъема при совпадении частоты колебаний точки подвеса с собственной частотой системы «канат–груз». Таким образом, при подъеме груза с небольших глубин, когда можно не учитывать волновые процессы в подъемном канате, уменьшение жесткости системы «канат–груз» способствует уменьшению динамических усилий в канате.

Рассмотрим теперь подъем груза с большой глубины. В этом случае нам необходимо учитывать волновые и диссипативные процессы в подъемном канате. Рассмотрим следующую расчетную схему (рис. 9).

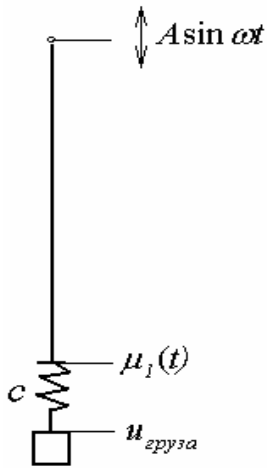


Рис. 9. Расчетная схема подъема груза с использованием упругого амортизатора.

Пусть точка крепления каната на судне совершает гармонические колебания по закону  $A \sin \omega t$ . Перемещения точки крепления амортизатора к канату определим функцией  $\mu_1(t)$ , а перемещения груза обозначим  $u_{\text{груза}}$ . Так как собственные колебания в системе интенсивно затухают из-за влияния диссипативных сил, будем искать вынужденные колебания груза с частотой, соответствующей частоте возбуждения:

$$u_{\text{груза}} = G_1 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t. \quad (28)$$

Динамическая составляющая натяжения в точке крепления упругого амортизатора к канату может быть представлена в виде:

$$T_{\text{дин}}(L, t) = E \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{s=L} + \mu E \left. \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right|_{s=L} = c(u_{\text{груза}} - \mu_1(t)), \quad (29)$$

где  $c$  - жесткость амортизатора.

Уравнение вертикальных колебаний груза может быть записано в виде:

$$M \frac{d^2 u_{\text{груза}}}{dt^2} + \beta \frac{du_{\text{груза}}}{dt} + c(u_{\text{груза}} - \mu_1(t)) = 0.$$

Подставляя в него выражение (28) для перемещения точки крепления амортизатора к канату:  $\mu_1(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$  и выделяя коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (c - M \omega^2) G_1 + \beta \omega G_2 = c B_1 \\ -\beta \omega G_1 + (c - M \omega^2) G_2 = c B_2 \end{cases}.$$

Применяя правило Крамера, получим соотношения, связывающие амплитуды колебаний точки крепления амортизатора к канату с амплитудами колебаний груза:

$$\begin{aligned} \Delta_G &= (c - M \omega^2)^2 - (\beta \omega)^2; \\ \Delta_{1G} &= c B_1 (c - M \omega^2) - c B_2 \beta \omega = n_{11} B_1 + n_{12} B_2; \\ \Delta_{2G} &= c B_2 (c - M \omega^2) + c B_1 \beta \omega = n_{21} B_1 + n_{22} B_2; \\ G_1 &= \frac{n_{11}}{\Delta_G} B_1 + \frac{n_{12}}{\Delta_G} B_2; \quad G_2 = \frac{n_{21}}{\Delta_G} B_1 + \frac{n_{22}}{\Delta_G} B_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (23) и (29), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 T_{din}(L,t) &= \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p)\cos\omega t + D_2(p)\sin\omega t] + \frac{E}{L} [B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t] - \frac{E}{L} A\sin\omega t + \\
 &+ \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi\omega}{L} [-D_1(p)\sin\omega t + D_2(p)\cos\omega t] + \frac{\mu E}{L} [-B_1\omega\sin\omega t + B_2\omega\cos\omega t] - \frac{\mu E}{L} A\omega\cos\omega t = (31) \\
 &= c \left( \frac{n_{11}}{\Delta_G} B_1\cos\omega t + \frac{n_{12}}{\Delta_G} B_2\cos\omega t + \frac{n_{21}}{\Delta_G} B_1\sin\omega t + \frac{n_{22}}{\Delta_G} B_2\sin\omega t - B_1\cos\omega t - B_2\sin\omega t \right).
 \end{aligned}$$

Выделяя в (31) коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему алгебраических уравнений для определения  $B_1$  и  $B_2$ :

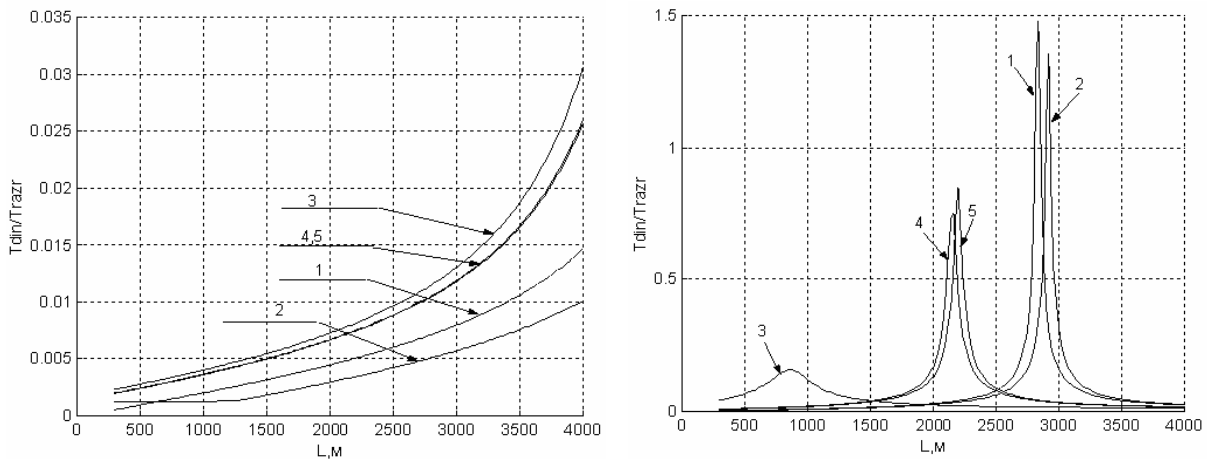
$$\left\{ \begin{aligned}
 2 \frac{E\pi}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p D_1(p) + \frac{E}{L} B_1 + \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p D_2(p) + \frac{\mu E}{L} B_2\omega - \frac{\mu E}{L} A\omega &= \\
 = c \frac{n_{11}}{\Delta_G} B_1 + c \frac{n_{12}}{\Delta_G} B_2 - c B_1 & \\
 2 \frac{E\pi}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p D_2(p) + \frac{E}{L} B_2 - \frac{E}{L} A - \frac{2\mu E\pi\omega}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p D_1(p) - \frac{\mu E\omega B_1}{L} &= \\
 = c \frac{n_{21}}{\Delta_G} B_1 + c \frac{n_{22}}{\Delta_G} B_2 - c B_2 &
 \end{aligned} \right.$$

Определив  $B_1$  и  $B_2$ , на основе соотношений (25) и (26) можно построить зависимости максимальных перемещений в канате  $\frac{u_{\max}(s)}{A} = \frac{\sqrt{R_1^2(s) + R_2^2(s)}}{A}$  и максимальной динамической составляющей натяжения  $\frac{T_{\max din}(s)}{T_{\text{разр}}}$  для различных сечений каната в зависимости от частоты возбуждения  $\omega$ . С использованием (30) может быть получено значение максимального перемещения груза при заданных длине выпущенной части каната  $L$  и частоте возбуждения  $\omega$ :  $u_{\text{груза}}^{\max} = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}$ .

По предложенной методике были построены зависимости максимальных безразмерных динамических составляющих натяжения для системы с рассмотренными выше параметрами, которые получались при введении упругого амортизатора. Жесткость амортизатора  $c_{\text{синт}}$  варьировалась и составляла последовательно  $0.01 c_l$ ,  $0.1 c_l$ ,  $c_l$ ,  $10 c_l$ ,  $100 c_l$ , где  $c_l = \frac{E}{L} = 4927$  Н/м - жесткость несущего каната при длине выпущенной части  $L = 4000$  м. Этим жесткостям упругого амортизатора соответствовали его длины: 2583 м, 258.3 м, 25.83 м, 2.583 м, 0.2583 м (предполагалась, что используется упругий амортизатор из капронового каната; крайние значения жесткостей и длин амортизатора используются для целей параметрического исследования задачи).

На рис. 10, 11 представлены графики изменения безразмерных максимальных динамических усилий в несущем канате по мере изменения его длины при заданных частотах возбуждения и жесткостях упругого амортизатора.

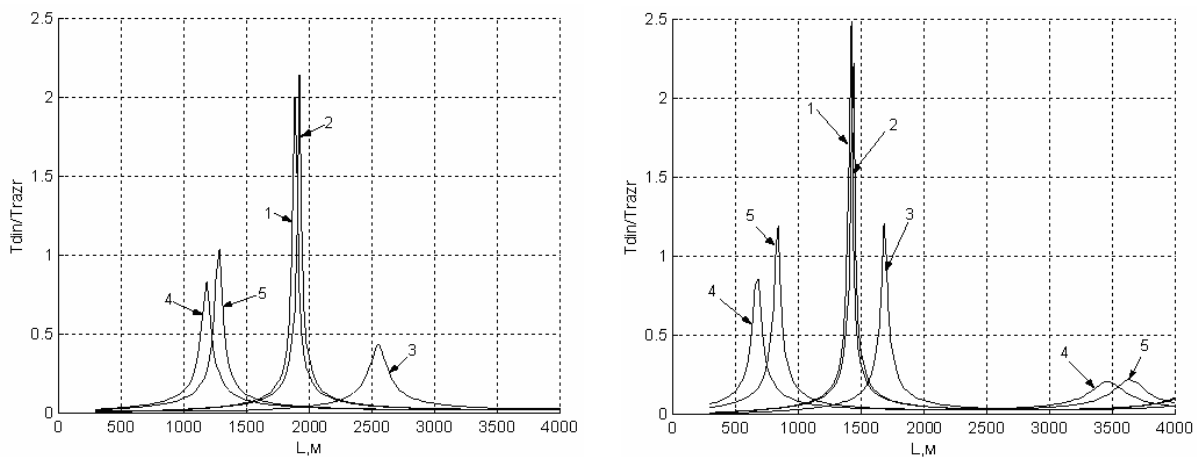
В отличие от расчетной модели, в которой канат заменяется безынерционной пружиной, здесь уменьшение жесткости упругого амортизатора не всегда приводит к уменьшению динамических усилий в несущем канате. Оптимальным решением с точки зрения уменьшения динамических усилий является упругая вставка с жесткостью  $c_{\text{синт}} = 10 c_l$ , т.е. длиной около 2.6 м.



**Рис. 10.** Максимальные безразмерные усилия в канате при подъеме груза:

слева -  $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$ ; справа -  $\omega = 2 \text{ c}^{-1}$

(1 -  $c_{\text{синт}} = 0.01 c_1$ ; 2 -  $c_{\text{синт}} = 0.1 c_1$ ; 3 -  $c_{\text{синт}} = c_1$ ; 4 -  $c_{\text{синт}} = 10 c_1$ ; 5 -  $c_{\text{синт}} = 100 c_1$ ).



**Рис. 11.** Максимальные безразмерные усилия в канате при подъеме груза:

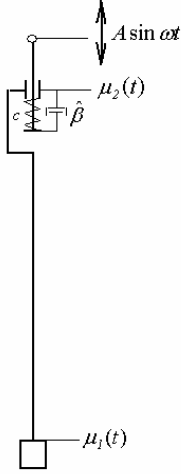
слева -  $\omega = 3 \text{ c}^{-1}$ ; справа -  $\omega = 4 \text{ c}^{-1}$

(1 -  $c_{\text{синт}} = 0.01 c_1$ ; 2 -  $c_{\text{синт}} = 0.1 c_1$ ; 3 -  $c_{\text{синт}} = c_1$ ; 4 -  $c_{\text{синт}} = 10 c_1$ ; 5 -  $c_{\text{синт}} = 100 c_1$ ).

Так как рассматриваемая система является линейной, все положения по определению усилий в системе в условиях нерегулярного волнения остаются справедливыми и в этом случае.

### Использование компенсатора вертикальных перемещений при подъеме груза

Другим способом уменьшения динамических усилий при подъеме груза является использование компенсатора вертикальных перемещений, который находится непосредственно на судне. Расчетная схема в этом случае может быть представлена в следующем виде (см.рис. 12). Здесь учитываются как упругие, так и демпфирующие свойства компенсатора.



**Рис. 12.** Расчетная схема подъема груза с использованием компенсатора вертикальных перемещений.

Перемещения точки соединения несущего каната с компенсатором будем искать как:

$$\mu_2(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t.$$

В этом случае уравнение (18) для изображений перемещений каната может быть записано следующим образом:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dt^2} + \tilde{n} \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{a^2 p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v} = \left[ -B_1 \omega^2 \cos \omega t - B_2 \omega^2 \sin \omega t \right] \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_1 \omega^2 \cos \omega t \frac{L}{p\pi} + A_2 \omega^2 \sin \omega t \frac{L}{p\pi}.$$

Подставляя в явном виде выражение для  $\bar{v}(p) = D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t$ , получим:

$$\begin{aligned} & -D_1(p) \omega^2 \cos \omega t - D_2(p) \omega^2 \sin \omega t + \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho} \left[ -D_1(p) \omega \sin \omega t + D_2(p) \omega \cos \omega t \right] + \\ & + \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} D_1(p) \cos \omega t + \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} D_2(p) \sin \omega t = \\ & = \left[ -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] \cos \omega t + \left[ -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] \sin \omega t \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений для определения  $D_1(p)$  и  $D_2(p)$ :

$$\begin{cases} a_{11}(p) D_1(p) + a_{12}(p) D_2(p) = b_1(p) \\ a_{21}(p) D_1(p) + a_{22}(p) D_2(p) = b_2(p) \end{cases},$$

где  $a_{11}(p) = a_{22}(p) = \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2$ ;  $a_{12}(p) = \omega \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho}$ ;  $a_{21}(p) = -\omega \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho}$ ;

$$b_1(p) = -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi}; \quad b_2(p) = -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi}.$$

Определитель системы:  $\Delta(p) = \left[ \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right] + \omega^2 \left[ \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho} \right]^2 \neq 0.$

Применим правило Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta_1(p) &= \left( -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right) \left[ \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right] - \omega \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho} \left[ -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] = \\ &= f_{11}(p) B_1 + f_{12}(p) B_2 + d_{11}(p) A_1 + d_{12}(p) A_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(p) &= \left[ -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] \left[ \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right] + \omega \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho} \left[ -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p + A_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} \right] = \\ &= f_{21}(p) B_1 + f_{22}(p) B_2 + d_{21}(p) A_1 + d_{22}(p) A_2. \end{aligned}$$

Тогда:

$$D_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} B_2 + \frac{d_{11}(p)}{\Delta(p)} A_1 + \frac{d_{12}(p)}{\Delta(p)} A_2; \quad (32)$$

$$D_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} B_2 + \frac{d_{21}(p)}{\Delta(p)} A_1 + \frac{d_{22}(p)}{\Delta(p)} A_2. \quad (33)$$

Применяя обратное синус-преобразование Фурье согласно (22) и переходя от переменной  $v$  к переменной  $u$ , получим:

$$u(s, t) = \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_1(p) \sin \frac{p\pi s}{L} \cos \omega t + \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_2(p) \sin \frac{p\pi s}{L} \sin \omega t + \frac{s}{L} B_1 \cos \omega t + \frac{s}{L} B_2 \sin \omega t + \left(1 - \frac{s}{L}\right) A_1 \cos \omega t + \left(1 - \frac{s}{L}\right) A_2 \sin \omega t = R_1(s) \cos \omega t + R_2(s) \sin \omega t. \quad (34)$$

Тогда динамическая составляющая натяжения будет равна:

$$\begin{aligned} T_{din}(s, t) &= E \frac{\partial u}{\partial s} + \mu E \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = \\ &= \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \frac{E}{L} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + \\ &+ \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi \omega}{L} [-D_1(p) \sin \omega t + D_2(p) \cos \omega t] \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{\mu E}{L} [-B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t] - \\ &- \frac{\mu E}{L} (-A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t). \end{aligned} \quad (35)$$

Динамическая составляющая натяжения в точке крепления каната к грузу:

$$\begin{aligned} T_{din}(L, t) &= \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \\ &- \frac{E}{L} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi \omega}{L} [-D_1(p) \sin \omega t + D_2(p) \cos \omega t] + \\ &+ \frac{\mu E}{L} [-B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t] - \frac{\mu E}{L} (-A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t), \end{aligned}$$

а динамическая составляющая натяжения в точке крепления каната к компенсатору:

$$\begin{aligned} T_{din}(0, t) &= \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \\ &- \frac{E}{L} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi \omega}{L} [-D_1(p) \sin \omega t + D_2(p) \cos \omega t] + \\ &+ \frac{\mu E}{L} [-B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t] - \frac{\mu E}{L} (-A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t). \end{aligned}$$

Из условий равенства силы, действующей со стороны каната на компенсатор, и силы реакции компенсатора следует:

$$T_{din}(0, t) = [A \sin \omega t - \mu_2(t)] c + \beta \left( A \omega \cos \omega t - \frac{d\mu_2}{dt} \right).$$

Подставляя в явном виде выражения для  $\mu_2(t)$ ,  $T_{din}(0, t)$  и выделяя в уравнении коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему алгеб-



раических уравнений, связывающую амплитуды перемещений груза и точки крепления каната к компенсатору:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{E\pi}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} p D_1(p) + \frac{E}{L} B_1 - \frac{E}{L} A_1 + \frac{2\mu E \pi \omega}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} p D_2(p) + \frac{\mu E}{L} B_2 \omega - \frac{\mu E}{L} A_2 \omega = \\ \quad = -c A_1 + \hat{\beta} A \omega - \hat{\beta} A_2 \omega \\ 2 \frac{E\pi}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} p D_2(p) + \frac{E}{L} B_2 - \frac{E}{L} A_2 - \frac{2\mu E \pi \omega}{L^2} \sum_{p=1}^{\infty} p D_1(p) - \frac{\mu E \omega B_1}{L} + \frac{\mu E A_1 \omega}{L} = \\ \quad = c A - c A_2 + \hat{\beta} A_1 \omega \end{array} \right. \quad (36)$$

Подставляя в явном виде выражения для  $D_1(p)$  и  $D_2(p)$  (32), (33), систему (36) можно представить как:

$$\begin{cases} l_{11} A_1 + l_{12} A_2 = m_{11} B_1 + m_{12} B_2 + m_{13} \\ l_{21} A_1 + l_{22} A_2 = m_{21} B_1 + m_{22} B_2 + m_{23} \end{cases}$$

Применяя правило Крамера, получим соотношения, связывающие амплитуды колебаний точки крепления каната к компенсатору с амплитудами колебаний груза:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_l &= l_{11} l_{22} - l_{12} l_{21}; \\ \tilde{\Delta}_{l1} &= l_{22} m_{11} B_1 + l_{22} m_{12} B_2 + l_{22} m_{13} - l_{12} m_{21} B_1 - l_{12} m_{22} B_2 - l_{12} m_{23}; \\ \tilde{\Delta}_{l2} &= l_{11} m_{21} B_1 + l_{11} m_{22} B_2 + l_{11} m_{23} - l_{21} m_{11} B_1 - l_{21} m_{12} B_2 - l_{21} m_{13}; \\ A_1 &= \frac{\tilde{\Delta}_{l1}}{\tilde{\Delta}_l} = n_{11} B_1 + n_{12} B_2 + n_{13}; \quad A_2 = \frac{\tilde{\Delta}_{l2}}{\tilde{\Delta}_l} = n_{21} B_1 + n_{22} B_2 + n_{23}. \end{aligned} \quad (37)$$

Тогда динамическая составляющая натяжения в точке крепления каната к грузу:

$$\begin{aligned} T_{din}(L, t) &= \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] - \\ &- \frac{E}{L} (n_{11} B_1 \cos \omega t + n_{12} B_2 \cos \omega t + n_{13} \cos \omega t + n_{21} B_1 \sin \omega t + n_{22} B_2 \sin \omega t + n_{23} \sin \omega t) + \\ &+ \frac{2\mu E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi \omega}{L} [-D_1(p) \sin \omega t + D_2(p) \cos \omega t] + \frac{\mu E}{L} [-B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t] - \\ &- \frac{\mu E}{L} (-n_{11} B_1 \omega \sin \omega t - n_{12} B_2 \omega \sin \omega t - n_{13} \omega \sin \omega t + n_{21} B_1 \omega \cos \omega t + n_{22} B_2 \omega \cos \omega t + n_{23} \omega \cos \omega t). \end{aligned} \quad (38)$$

Как и ранее, подставляя в уравнение вертикальных колебаний груза (12) выражения для перемещения груза  $\mu_1(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$ , для динамической составляющей натяжения в точке крепления (38) и выделяя коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, приходим к системе алгебраических уравнений для определения амплитуд колебаний груза  $B_1$  и  $B_2$ .

Определив  $B_1$  и  $B_2$ , на основе соотношений (37) могут быть получены амплитуды колебаний точки крепления каната к компенсатору, а затем определены максимальные перемещения груза  $\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$  и максимальные перемещения точки крепления каната к компенсатору  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ . На основе соотношений (34) и (35) могут быть построены зави-

симости максимальных перемещений в канате  $\frac{u_{\max}(s)}{A} = \frac{\sqrt{R_1^2(s) + R_2^2(s)}}{A}$  и максимальной

динамической составляющей натяжения  $\frac{T_{\max din}(s)}{T_{\text{раз}}}$  для различных сечений каната в зависимости от частоты возбуждения  $\omega$ . Здесь:

$$u_{\max}^2(s) = R_1^2(s) + R_2^2(s) =$$

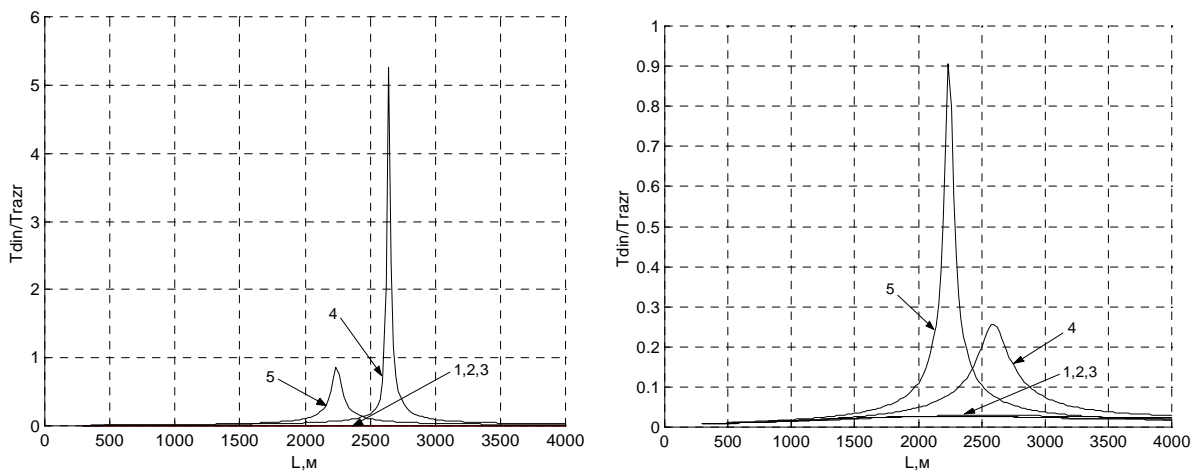
$$= \left[ \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_1(p) \sin \frac{p\pi s}{L} + \frac{s}{L} B_1 + \left(1 + \frac{s}{L}\right) A_1 \right]^2 + \left[ \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_2(p) \sin \frac{p\pi s}{L} + \frac{s}{L} B_2 + \left(1 - \frac{s}{L}\right) A \right]^2;$$

$$T_{\max din}^2(s) = \left[ \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} D_1(p) \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{E}{L} B_1 - \frac{E}{L} A_1 + \frac{2\mu E \omega}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} D_2(p) \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{\mu E}{L} B_2 \omega - \frac{\mu E}{L} A_2 \omega \right]^2 +$$

$$+ \left[ \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} D_2(p) \cos \frac{p\pi s}{L} + \frac{E}{L} B_2 - \frac{E}{L} A_2 - \frac{2\mu E \omega}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} D_1(p) \cos \frac{p\pi s}{L} - \frac{\mu E}{L} B_1 \omega + \frac{\mu E}{L} A_1 \omega \right]^2.$$

По предложенной методике были построены зависимости максимальных безразмерных динамических составляющих натяжения для системы с рассмотренными выше параметрами, которые получались при введении компенсатора вертикальных перемещений. Жесткость компенсатора  $c$  варьировалась и составляла последовательно:  $0.01c_1$ ,  $0.1c_1$ ,  $c_1$ ,  $10c_1$ ,  $100c_1$ , где  $c_1 = \frac{E}{L} = 4927 \text{ Н/м}$  - жесткость несущего каната при длине выпущенной части  $L = 4000 \text{ м}$ . Здесь максимальное значение жесткости компенсатора практически соответствует случаю жесткого закрепления каната и используется для целей параметрического исследования задачи.

На рис. 13 представлены значения максимальных динамических составляющих натяжения, возникающих в канате по мере подъема груза при частоте возбуждения  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$  без демпфирования ( $\hat{\beta} = 0 \text{ кг/с}$ ) и с демпфированием ( $\hat{\beta} = 10^4 \text{ кг/с}$ ) в компенсаторе. Видно, что введение демпфирования в компенсатор позволяет избежать динамических усилий, превышающих разрывные усилия во всем диапазоне варьирования жесткостью компенсатора. Как и следовало ожидать, при введении демпфирования уровень резонансных пиков натяжения оказывается меньшим.



**Рис. 13.** Максимальные безразмерные усилия в канате при подъеме груза: слева -  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\hat{\beta} = 0 \text{ кг/с}$ ; справа -  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\hat{\beta} = 10^4 \text{ кг/с}$  (1 -  $c = 0.01 c_1$ ; 2 -  $c = 0.1 c_1$ ; 3 -  $c = c_1$ ; 4 -  $c = 10 c_1$ ; 5 -  $c = 100 c_1$ ).

Как и в предыдущем случае, рассматриваемая система является линейной, и все положения по определению усилий в условиях нерегулярного волнения остаются справедливыми. Для оценки влияния волновых процессов рассмотрим систему с компенсатором вертикальных перемещений, в которой упругий канат заменен безынерционной пружиной с соответствующей жесткостью. Уравнение вертикальных колебаний груза в этом случае может быть записано в виде:

$$M \frac{d^2\mu_1}{dt^2} + \beta \frac{d\mu_1}{dt} + c_l \mu_1 = c_l \mu_2(t), \quad (39)$$

где  $c_l = \frac{E}{L}$  - жесткость выпущенной части каната.

Из условий равенства силы, действующей со стороны каната на компенсатор, и силы реакции компенсатора получим:

$$c_l(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = [A \sin \omega t - \mu_2(t)]c + \widehat{\beta} \left( A \omega \cos \omega t - \frac{d\mu_2}{dt} \right).$$

Выражая  $\mu_1(t)$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \left( 1 + \frac{c}{c_l} \right) \mu_2(t) - A \frac{c}{c_l} \sin \omega t + \frac{\widehat{\beta}}{c_l} \frac{d\mu_2}{dt} - \frac{A \omega \widehat{\beta}}{c_l} \cos \omega t = \\ &= k_1 \mu_2(t) + k_2 \frac{d\mu_2}{dt} - \frac{Ac}{c_l} \sin \omega t - \frac{A \omega \widehat{\beta}}{c_l} \cos \omega t \end{aligned}, \quad (40)$$

где  $k_1 = 1 + \frac{c}{c_l}$ ,  $k_2 = \frac{\widehat{\beta}}{c_l}$ .

Подставляя (40) в (39), получим:

$$a_3 \frac{d^3\mu_2}{dt^3} + a_2 \frac{d^2\mu_2}{dt^2} + a_1 \frac{d\mu_2}{dt} + a_0 \mu_2 = N_1 \cos \omega t + N_2 \sin \omega t, \quad (41)$$

где  $a_3 = k_2 M$ ;  $a_2 = k_1 M + k_2 \beta$ ;  $a_1 = k_1 \beta + k_2 c_l$ ;  $a_0 = k_1 c_l - c_l$ ;  $N_1 = -M \frac{A \omega^3 \widehat{\beta}}{c_l} + \beta \frac{Ac \omega}{c_l} + A \omega \widehat{\beta}$ ;

$$N_2 = -M \frac{Ac \omega^2}{c_l} - \beta \frac{A \omega^2 \widehat{\beta}}{c_l} + Ac.$$

Решение (41) ищем в виде:

$$\mu_2(t) = U_1 \cos \omega t + U_2 \sin \omega t. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (41) и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему алгебраических уравнений для определения  $U_1$  и  $U_2$ :

$$\begin{cases} (a_0 - a_2 \omega^2) U_1 + (a_1 \omega - a_3 \omega^3) U_2 = N_1 \\ (a_3 \omega^3 - a_1 \omega) U_1 + (a_0 - a_2 \omega^2) U_2 = N_2 \end{cases}.$$

Зная  $U_1$  и  $U_2$ , на основе (40) можем определить перемещение груза:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= k_1 U_1 \cos \omega t + k_1 U_2 \sin \omega t - k_2 \omega U_1 \sin \omega t + k_2 \omega U_2 \cos \omega t - \frac{Ac}{c_l} \sin \omega t - \frac{A \omega \widehat{\beta}}{c_l} \cos \omega t = \\ &= \left[ k_1 U_1 + k_2 \omega U_2 - \frac{A \omega \widehat{\beta}}{c_l} \right] \cos \omega t + \left[ k_1 U_2 - k_2 \omega U_1 - \frac{Ac}{c_l} \right] \sin \omega t. \end{aligned}$$

Максимальное перемещение груза может быть определено на основе соотношения:

$$\mu_{1max}^2 = \left[ k_1 U_1 + k_2 \omega U_2 - \frac{A\omega\beta}{c_l} \right]^2 + \left[ k_1 U_2 - k_2 \omega U_1 - \frac{Ac}{c_l} \right]^2.$$

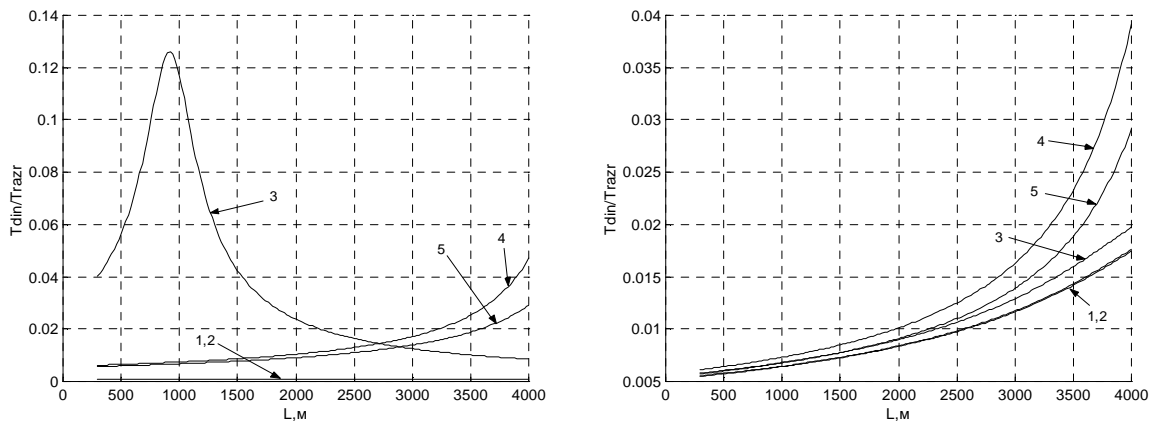
Динамическая составляющая натяжения в системе равна:

$$T_{din}(t) = c_l(\mu_1(t) - \mu_2(t)) = c_l(k_1 U_1 \cos \omega t + k_1 U_2 \sin \omega t - k_2 \omega U_1 \sin \omega t + k_2 \omega U_2 \cos \omega t - \frac{Ac}{c_l} \sin \omega t - \frac{A\omega\beta}{c_l} \cos \omega t - U_1 \cos \omega t - U_2 \sin \omega t) = c_l \left[ k_1 U_1 + k_2 \omega U_2 - \frac{A\omega\beta}{c_l} - U_1 \right] \cos \omega t + c_l \left[ k_1 U_2 - k_2 \omega U_1 - \frac{Ac}{c_l} - U_2 \right] \sin \omega t.$$

Теперь может быть определено максимальное динамическое натяжение в системе:

$$T_{maxdin}^2 = c_l^2 \left[ k_1 U_1 + k_2 \omega U_2 - \frac{A\omega\beta}{c_l} - U_1 \right]^2 + c_l^2 \left[ k_1 U_2 - k_2 \omega U_1 - \frac{Ac}{c_l} - U_2 \right]^2.$$

На рис. 14 представлены значения максимальных динамических составляющих натяжения, возникающих в канате по мере подъема груза при частоте возбуждения  $\omega = 2 \text{ c}^{-1}$  без демпфирования ( $\beta = 0 \text{ кг/с}$ ) и с демпфированием ( $\beta = 10^4 \text{ кг/с}$ ) в компенсаторе, полученные на основе рассматриваемой модели, т.е. без учета волновых процессов в канате.



**Рис. 14.** Максимальные безразмерные усилия в канате при подъеме груза:

слева -  $\omega = 2 \text{ c}^{-1}$ ;  $\beta = 0 \text{ кг/с}$ ; справа -  $\omega = 2 \text{ c}^{-1}$ ;  $\beta = 10^4 \text{ кг/с}$   
 (1 -  $c = 0.01c_1$ ; 2 -  $c = 0.1c_1$ ; 3 -  $c = c_1$ ; 4 -  $c = 10c_1$ ; 5 -  $c = 100c_1$ ).

Видно, что пренебрежение инерционными свойствами каната приводит к значительному снижению максимальных динамических составляющих натяжения по сравнению с моделью, учитывающей волновые процессы (см.рис. 13). При больших выпущенных длинах каната упрощенная модель не позволяет выявить резонансные режимы, при прохождении через которые, по мере выборки каната, реализуются максимальные динамические усилия в системе.

\*\*\*

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что учет конечной скорости распространения продольных деформаций необходим для корректной оценки динамических усилий, возникающих в канате при подъеме (опускании) груза с больших глубин. При значительных длинах упругой связи высшие собственные частоты системы «канат-груз» могут попадать в спектр частот морского волнения. Учет сил гидродинамической природы и сил внутреннего трения в материале каната важен для корректного определения усилий, в том числе при резонансных режимах колебаний.

Предложенный в работе для расчета волновых процессов в упругой связи метод конечных интегральных преобразований Фурье позволяет достаточно эффективно учитывать силы внутреннего трения в материале каната, а также влияние дополнительных амортизирующих и демпфирующих устройств, обеспечивающих уменьшение усилий в канате.

Максимальные динамические усилия, которые возникают в канате при подъеме (опускании) груза, соответствуют случаю резонанса на регулярном волнении. Поэтому, если система «канат-груз» способна выдержать резонансный режим колебаний, никаких дополнительных исследований о нерегулярности волнения можно не производить. Если система в реальных условиях работает вдали от резонанса, необходимо производить расчет усилий в подъемном канате в условиях нерегулярного волнения.

#### Литература

1. Берто Г.О. Океанографические буи. Л.: Судостроение, 1979. 216 с.
2. Бугаенко Б.А., Магула В.Э. Специальные судовые устройства. Л.: Судостроение, 1983. 392 с.
3. Бугаенко Б.А. Динамика судовых спуско-подъемных операций. Киев: Наукова думка, 2004. 320 с.
4. Горошко О.А., Демьяненко А.Г. О двухволновом представлении решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторых конструкций с подвижной нагрузкой // Украинский матем. журн. 1974. Т.29. №5. С.638-641.
5. DNV Recommended practice DNV-RP-H103, «Modeling and analysis of marine operations». April. 2009. 84 p.
6. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1974. 224 с.
7. Бородай И.К., Нецветаев Ю.А. Качка судов на морском волнении. Л.: Судостроение, 1969. 432 с.
8. Виноградов Н.И., Гутман М.Л., Лев И.Г., Нисевич М.З. Привязные подводные системы. Прикладные задачи статики и динамики. СПб.: СПбГУ, 2000. 320 с.

Статья поступила в редакцию 23.11.2009 г.

