



СОДЕРЖАНИЕ

Статьи

<i>Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г.</i> Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах	4
<i>Чаликов Д.В.</i> Трансформация гармонических волн на глубокой воде	14
<i>Волков К.Н., Емельянов В.Н., Курова И.В.</i> Моделирование крупных вихрей в задачах гидрофизики и гидроакустики	22
<i>Карлин Л.Н., Рябченко В.А., Ванкевич Р.Е., Еремина Т.Р., Исаев А.В., Неелов И.А.</i> Испытание оперативной океанографической системы при прогнозе гидродинамических характеристик в Финском заливе Балтийского моря	39
<i>Никифоров С.Л., Попов В.А., Попов О.Е., Селезнев И.А.</i> Концепция создания единой базы геоакустических данных морского дна и технологии геоакустического моделирования	49
<i>Долин Л.С.</i> Лидарный метод измерения частотно-контрастной характеристики водных слоев	62
<i>Дашевский О.Ю., Нежевенко Е.С.</i> Методы апертурного синтеза гидроакустических антенн в пассивном режиме и их испытание на тестовых и реальных сигналах	72

Конференции

XXII семинар «Струйные, отрывные и нестационарные течения» (<i>Матвеев С.К., Усков В.Н.</i>)	86
--	----

Из истории науки

Г.И. Марчук о физике атмосферы и океана	87
---	----

Поздравляем!	91
---------------------------	----

Хроника	94
----------------------	----

Правила представления материалов в редакцию.....	97
--	----

CONTENTS

Articles

<i>Pelinovsky E.N., Talipova T.G.</i> Non-reflective Wave Propagation in Strongly Inhomogeneous Media	4
---	---

It is well known that wave dispersion in inhomogeneous media leads to energy flux weakening on large distances. The more interesting cases are when inhomogeneity does not prevent wave propagation. This problem is studied here for internal waves in the ocean. Firstly, the penetration of internal waves into a deep ocean, stratified with density and current, is discussed, and it is shown that there is sufficient number of stratification profiles allowing non-reflected wave propagation into the ocean bulk. Further the internal wave propagation in two-layer stratified ocean of variable depth is investigated. The set of bottom profiles where the wave energy is not scattered, is also found.

Key words: non-reflected wave propagation, internal waves, non-reflected stratification and bottom profile.

<i>Chalikov D.V.</i> Harmonic Wave Deep Water Transformation	14
--	----

Precise numerical model of potential; surface waves is used to investigate the wave field evolution, initially assigned as a train of harmonic waves. It is shown that harmonic wave of any amplitude quickly generates the new modes, which undergo the complicated evolution. These modes can be referred neither to bound waves nor to free waves.

Key words: harmonic waves, instability, numerical modelling, Stokes waves.

<i>Volkov K., Emelyanov V., Kurova I.</i> Large-eddy Simulation in Hydrophysical and Hydroacoustic Problems	22
---	----

Applications of large-eddy simulation (LES) technique to the solution of problems of hydrophysics and hydroacoustics are considered. Solutions of some model problems (free mixing layer, free sub-sonic non-isothermal turbulent jet flowing out of circular nozzle into submerged space, and aero-optical effects in turbulent flows) are presented. The results obtained are compared to the data calculated with the numerical solution of the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations and equations of the k – ϵ turbulence model, as well as to the available experimental data. The conclusions related to the perspectives of use of this technique in the problems of hydrophysics and hydroacoustics are made.

Key words: turbulence, large-eddy simulation, computational fluid dynamics, jet, mixing layer.

<i>Karlin L.N., Ryabchenko V.A., Vankevich R.E., Eremina T.R., Isaev A.V., Neelov I.A.</i> Testing an Operational Oceanographic System Testing by Means of Forecasting of Hydrodynamical Characteristics in the Gulf of Finland of the Baltic Sea	39
--	----

An operational system for forecasting of hydrodynamic characteristics in the Gulf of Finland GULFOOS (the Gulf of Finland Operational Oceanographic System) has been developed. The system is based on the hydrodynamic module of St. Petersburg Baltic Eutrophication Model. The system has been working in the operation mode from May 2009 using data from short-term weather forecasts for the North-West Region of Russia and forecasts of boundary conditions at the entrance in the Gulf of Finland. 48-hour model forecasts were compared to observed vertical temperature and salinity profiles and water level in Kronshtadt. The comparison showed that the model system simulates the observations quite well.

Key words: operational oceanography, hydrodynamic forecast, the Gulf of Finland.

<i>Nikiforov S.L., Popov V.A., Popov O.E., Seleznev I.A.</i> The Concept of Common Sea-Bottom Geoacoustic Database Creation and Geoacoustic Modeling Techniques	49
---	----

The authors consider some problems of supporting Russia sea activity in the important water areas of the World ocean, which cause creation of geoacoustic databases and the geoacoustic models of a sea-bottom required for all carriers of sonar means of underwater conditions imaging for operative forecasting of surveillance conditions in the navigation area and supporting efficient operation of adaptive hydroacoustic information processing algorithms. The concept of common water areas sea-bottom database creation and sea bottom geoacoustic modeling techniques are offered. Data about structure of a perspective integrated sonar system of sea-bottom monitoring and problems solved with its help are cited.

Key words: geoacoustic model, database, sonar means, acoustic characteristics, offshore area.

<i>Dolin L.S.</i> Lidar Methods for Measurement of Modulation Transfer Function of Water Layers	62
--	----

We develop algorithms for retrieval of the water layer modulation transfer function (MTF) from the radiance of backscattered laser pulse. A lidar diagram is developed for remote measuring of the MTF. The water optical properties are then retrieved from measured MTF. We also propose a laser imaging system for sea bottom observation which corrects image distortion caused by light scattering in the water.

Key words: lidar, imaging, water, modulation transfer function, image correction.

<i>Dashevskii O.Yu., Nejevenko E.S.</i> Passive Aperture Synthesis Techniques for Towed Arrays and Their Probation with Test and Real Signals	72
--	----

The paper contains a brief review of aperture synthesis techniques for towed arrays operating in passive mode. A technique is suggested that is able to process wideband signals, also from multiple sources (as opposed to known techniques). The results of experimental studies of aperture synthesis are presented, obtained both from computer-generated signals (SynApp program has been developed for this purpose), and from signals of a real underwater towed array.

Key words: hydroacoustics, aperture synthesis, beamforming, modeling.

УДК 501

© Д.В. Чаликов

Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН
blue_whale_tale@yahoo.com

ТРАНСФОРМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

Численная модель потенциальных поверхностных волн используется для исследования эволюции волн, первоначально заданных в виде цуга гармонических волн. Показано, что гармоническая волна любой амплитуды очень быстро порождает новые моды, которые быстро претерпевают сложную эволюцию. Эти моды нельзя отнести ни к окаймляющим модам, ни к свободным волнам.

Ключевые слова: гармонические волны, неустойчивость, численное моделирование, волны Стокса.

Гармонические волны играют важную роль в теории поверхностных волн и технических приложениях. Во многих случаях предполагается, что реальное волновое поле может быть представлено суперпозицией таких волн со случайно распределёнными фазами. В большинстве случаев это предположение довольно точно, если не рассматриваются волны средней и большой крутизны или не вычисляется обмен энергией между модами за счёт нелинейных взаимодействий высокого порядка. Такое взаимодействие может зависеть от тонких деталей. Например, известно, что для возникновения неустойчивости Бенджамина-Фейера (Benjamin, Feir, [1], BF) нужно учитывать хотя бы первый член разложения Стокса. Следовательно, если в теории возмущений в качестве несущей волны задаётся гармоническая волна, BF неустойчивости не возникает. Между тем, точное моделирование, основанное на полных двухмерных (в плоскости $x-z$) уравнениях потенциальных волн показывает, что неустойчивость типа Бенджамина-Фейера возникает и в этом случае и развивается не медленнее, чем для волн Стокса. Это развитие выражается в появлении и росте за счёт квадратичных взаимодействий новых волновых компонент, которые берут на себя функции окаймляющих волн Стокса, далее развивается неустойчивость Бенджамина-Фейера, и в результате происходит полная стохастизация волнового поля [6]. При этом в одномерной проблеме формируется необратимый поток энергии по спектру в области высоких и низких частот, что, с одной стороны, порождает высокочастотную диссипацию, а с другой – сдвиг максимума спектра в область низких частот («downshifting»). Диссипация может быть устранена расширением области интегрирования в пространстве Фурье, но распространение энергии в область низкочастотных мод остаётся реальностью. Любопытно, что этот достаточно быстрый процесс не воспроизводится в теории Хассельманна (Hasselmann, [2]). Для крутых волн существует два режима неустойчивости. Эволюция цуга гармонических волн с крутизной $ak > 0.28$ всегда заканчивается их одновременным опрокидыванием.

Волны с крутизной $ak < 0.28$ трансформируются, порождая новые моды. Скорость этой трансформации зависит от первоначальной крутизны волны, но эта эволюция заканчивается в конечном итоге опрокидыванием для первичной крутизны несущей волны $AK > 0.12$. Для меньшей крутизны опрокидывание не было достигнуто в обозримое время ни разу.

В настоящей работе эволюция гармонических волн малой и умеренной крутизны исследуется на основе точной модели двухмерных потенциальных волн [3-6]. Целью настоящей работы является доказательство того, что гармонические волны сами по себе неустойчивы при отсутствии возмущений.

Уравнения. Рассматриваются периодические, одномерные (т.е. в плоскости x - z) волны на основе первичных уравнений в потенциальном приложении. Благодаря периодичности, конформное преобразование может быть представлено рядом Фурье:

$$x = \xi + \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} \text{sign}(k) \eta_{-k}(\tau) \exp(|k|\zeta) \vartheta_k(\xi), \quad (1)$$

$$z = \zeta + \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} \eta_k(\tau) \exp(|k|\zeta) \vartheta_k(\xi), \quad (2)$$

где x и z – декартовы следующие поверхности координаты; M – предельное волновое число; τ – время; η_k – коэффициенты разложения Фурье для свободной поверхности $\eta(\xi, \tau)$, рассчитанные в координате ξ :

$$\eta(\xi, \tau) = h(x(\xi, \zeta = 0, \tau), t = \tau) = \sum_{-M \leq k \leq M} \eta_k(\tau) \vartheta_k(\xi). \quad (3)$$

Здесь использовано стандартное для Фурье-сеточного метода обозначение для базисных функций ϑ_k :

$$\vartheta_k(\xi) = \begin{cases} \cos k\xi, & k \geq 0 \\ \sin k\xi, & k < 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Нетрадиционное представления (3) и (4) в действительности более удобно, чем комплексное, для оперирования в области действительных чисел, поскольку $(\vartheta_k)_\xi = k\vartheta_{-k}$ и $\sum (A_k \vartheta_k)_\xi = -\sum k A_{-k} \vartheta_k$. Заметим, что определение обеих координат ξ и ζ основано на коэффициентах Фурье для свободной поверхности. Из (1) и (2) следует, что производные по времени z_τ и x_τ :

$$(x_\tau)_k = \begin{cases} -(z_\tau)_{-k} & k > 0 \\ (z_\tau)_k & k < 0 \end{cases},$$

Благодаря конформности уравнение Лапласа в (ξ, ζ) координатах сохраняет свою форму. Чаликов и Шейнин (Chalikov, Sheinin, 1996, 1998) показали, что полные двухмерные уравнения потенциальных волн могут быть представлены в виде:

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0, \quad (5)$$

$$z_\tau = x_\xi \zeta_\tau + z_\xi \xi_\tau, \quad (6)$$

$$\Phi_\tau = f \Phi_\xi - \frac{1}{2} J^{-1} (\Phi_\xi^2 - \Phi_\zeta^2) - z, \quad (7)$$

$$\zeta_\tau = (J^{-1} \Phi_\zeta)_{\zeta=0}, \quad (8)$$

где (6)–(8) относятся к поверхности $\zeta = 0$ (так что $z = \eta$, как следует из (1)), J – якобиан преобразования $J = x_\xi^2 + z_\xi^2 = x_\zeta^2 + z_\zeta^2$.

Производные ζ_τ и ξ_τ связаны между собой преобразованием Гильберта, которое в Фурье–пространстве имеет простой вид:

$$(\zeta_\tau)_k = \begin{cases} -(\xi_\tau)_{-k} & k > 0 \\ (\xi_\tau)_k & k < 0 \end{cases}$$

где индексы подразумевают Фурье–амплитуды с соответствующим номером.

Уравнения (5)–(8) выписаны в безразмерной форме с использованием масштабов: длины L , (где $2\pi L$ – размерная длина области), времени $L^{1/2}g^{-1/2}$ и потенциала скорости $L^{3/2}g^{-1/2}$ (g – ускорение силы тяжести). В принципе, капиллярность может быть легко принята во внимание, однако, для одновременного моделирования ветровых и капиллярных волн требуется чрезмерно большое число мод. Роль капиллярных волн в процессе роста гравитационных ветровых волн в океане скорей всего преувеличена.

Граничное условие на нижней границе предполагает затухание вертикальной скорости:

$$\Phi_\zeta(\xi, \zeta \rightarrow -\infty, \tau) = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения Лапласа (5.6) с граничными условиями (9) имеет вид:

$$\Phi = \sum_{-M \leq k \leq M} \phi_k(\tau) \exp(k\zeta) \vartheta_k(\xi),$$

где ϕ_k – Фурье–коэффициенты потенциала скорости на поверхности $\Phi(\xi, \zeta = 0, \tau)$. Уравнения (5)–(8), образуют замкнутую систему прогностических уравнений для формы поверхности $z(\xi, \zeta = 0, \tau) = \eta(\xi, \tau)$ и поверхностного потенциала $\Phi(\xi, \zeta = 0, \tau)$.

Интегрирование по времени проводилось по схеме Рунге–Кутты четвертого порядка. Выбор шага по времени $\Delta\tau$ проводился эмпирически. Например, для $M = 1000$ $\Delta\tau = 0.002$, для 4000 $\Delta\tau = 0.0005$. При повышении локальной крутизны и кривизны поверхности часто требовался меньший шаг по времени, поэтому в последних версиях программы часто применялся динамический выбор шага.

Специфической проблемой, возникающей при использовании криволинейных координат, является интерполяция решения в декартовы координаты и обратно. Для этих целей использовалась периодическая сплайн-интерполяция высокого порядка, которая обеспечивала высочайшую точность (в обсуждаемых ниже расчётах – порядка 10^{-15}).

Важнейшей проблемой, является проверка численной схемы и модели в целом. Волновая модель обеспечивает редкую возможность сравнения полной модели с точным решением для волн Стокса. Это сравнение было проведено Чаликовым и Шейниным [3, 4] и более детально в [5], где распространение очень крутых волн Стокса ($ak = 0.42$) воспроизводилось в 2,686,500 временных шагов до 932 периодов. При этом полная энергия уменьшилась всего на $3 \cdot 10^{-8} \%$. Аналогичные расчёты, проведенные также для $ak = 0.42$ Долдом (Dold, 1992), прервались вычислительной неустойчивостью уже через несколько периодов. Точная фазовая скорость для волн Стокса такой крутизны равна 1.089578. Прямые расчёты скорости продвижения волн Стокса, воспроизведенной моделью [5], дало значение 1.089579 ± 10^{-6} . Заметим, что проверка модели путём сравнения с волнами Стокса является полной и нетривиальной, поскольку начальные условия для стационарной волны Стокса рассчитывались независимо, по другой схеме, специально разработанной для стационарных решений для гравитационно–капиллярных волн в наших ранних публикациях (см. подробное описание алгоритма в [3, 5]). Аналогичные процедуры сравнения были проведены для гравитационно–капиллярных волн и капил-

лярных волн. Для расчета капиллярных волн использовалось аналитическое решение [7]. Типичная точность модели оказалась порядка 10^{-10} . Это не удивительно, поскольку волновая модель после трансформации в конформные координаты превратилась в два одномерных дифференциальных уравнения, которые могут решаться очень точно Фурье-сеточным методом, если выбрана точная схема интегрирования по времени. Высокая точность схемы необходима для сохранения инвариантов (массы, суммы потенциальной и кинетической энергий, горизонтального импульса). Отношения временных масштабов для притока энергии к характерным периодам волн составляет порядка 10^{-4} , так что индивидуально описываемые волны являются почти адиабатическим процессом. Замечательно, что схема, основанная на конформных координатах оказалась способной воспроизвести начальный период обрушивания волн, когда поверхность в декартовых оказывается неоднозначной [4]. Опрокидывание выражается в появлении струи на подветренном склоне в пике волны или образованием «шапочки», опрокидывающейся по ходу волны. Далее процесс становится неустойчивым по физическим, а не по вычислительным причинам.

Чрезвычайно важно, что адиабатические уравнения динамики волн (не обязательно потенциальных) являются автомодельными, т.е. инвариантными к линейному преобразованию координат (или изменению силы тяжести). Это означает, что простым масштабированием решение может быть применено к целому классу процессов, характеризующихся одинаковыми безразмерными начальными условиями.

Формулировка проблемы и результаты. В качестве начальных условий задавались возвышение $\eta(\xi)$ и поверхностный потенциал $\phi(\xi, 0)$ для цуга гармонических волн по формулам теории волн малой амплитуды:

$$\eta(\xi) = A \cos(Kx), \quad \phi(\xi, \zeta = 0) = -AK^{1/2} \sin(Kx),$$

где A – начальная амплитуда волны с волновым числом K . Число K фактически определяет точность аппроксимации. Оно должно быть настолько большим, чтобы его дальнейшее увеличение не приводило и заметному изменению результатов. В данных расчётах было выбрано $K = 20$. Число мод M задавалось равным 4000, а число точек в сеточном пространстве $N = 16000$. Успешное воспроизведение бегущей волны Стокса исключает необходимость дальнейшего обсуждения точности схемы, однако, дополнительным подтверждением является исключительно высокая точность сохранения полной энергии:

$$E = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (z^2 x_\xi - \phi \phi_\zeta) J^{-1} d\xi.$$

В демонстрируемых ниже расчётах величина E изменялась не более чем на $10^{-7} E$. Поскольку главной задачей здесь является исследование начальной эволюции волны, интегрирование проводилось на 50 периодов волны $T = 2\pi k^{-1/2}$, что было достаточно для надёжной регистрации образовавшихся мод.

Линейная теория волн предсказывает, что кинетическая энергия волны равна потенциальной энергии. Для гармонических волн сколько угодно малой амплитуды это предположение не выполняется: между двумя видами энергии происходят постоянный обмен. Амплитуда этих колебаний быстро растёт с увеличением крутизны. Пример такой эволюции для начальной крутизны $AK = 0.255$ приведён на рис. 1, где дана эволюция во времени потенциальной и кинетической энергий, а также их полусуммы. Как видно, для выбранного случая обе компоненты энергии могут колебаться в пределах 5%. Их сумма, конечно, остаётся строго постоянной.

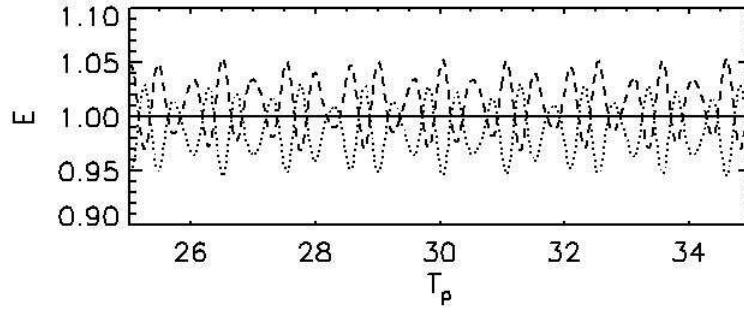


Рис. 1. Пример эволюции кинетической (точки), потенциальной (пунктир) энергий и их полусуммы (сплошная линия), нормированных на их начальные значения.

T_p – время, выраженное в периодах несущей волны.

Основные результаты для волн с крутизной $AK = 0.005, 0.105, 0.255$ приведены на рис. 2, где представлены траектории, описывающие эволюцию решения в пространстве (f, a) , где a – амплитуда моды, а f – путь, пройденный ею, вычисляемый по формуле:

$$f_k = \int_0 c_k dt,$$

где c_k – фазовая скорость k -ой моды, вычисляемой по формуле:

$$c_k = \frac{z_{-k} \frac{\partial z_k}{\partial \tau} - z_k \frac{\partial z_{-k}}{\partial \tau}}{k(z_k^2 + z_{-k}^2)}, \quad (10)$$

где производные по времени равняются просто Фурье-компонентам для z_τ . Для повышения точности результата фазовая скорость c_k вычислялась методом наименьших квадратов:

$$\overline{c_k} = \frac{\overline{AD}}{D^2},$$

где A – числитель, D – знаменатель в формуле (10), а осреднение проводилось по 100 последовательным шагам.

Верхняя линия на каждой секции соответствует амплитуде волны с волновым числом $K = 20$. Благодаря логарифмическому масштабу, только для крутизны $AK = 0.255$ заметно, что энергия главной моды не вполне постоянна. Как видно, гармоническая волна любой амплитуды немедленно порождает новые моды на волновых числах nK ($n=2, 3, 4...$) путем необратимых квадратичных взаимодействий. Новые моды не скреплены с несущей волной, напротив, их фазовые скорости колеблются во времени в широких пределах. Тем не менее, путь, пробегаемый этими волнами, сравним с путем, пробегаемым основной модой. Амплитуды этих мод изменяются на порядки. Моды с волновыми числами отличными от nK не возникают даже при длительном интегрировании, что подтверждает высокую точность численной схемы.

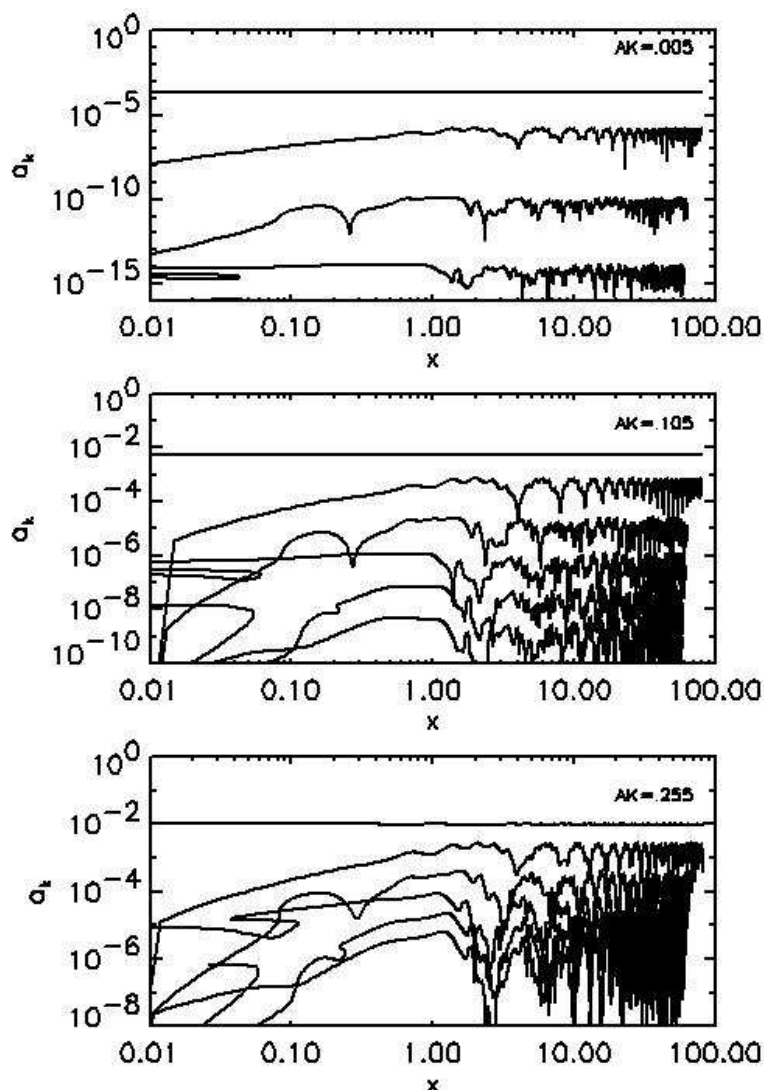


Рис. 2. Эволюция амплитуд основной моды с волновым числом $K = 20$ (верхние, практически прямые линии) и дополнительных мод с волновыми числами $k = nK$ в пространстве (a, x) для различной начальной крутизны несущей волны. x – путь, пробегаемый волной, выраженный в длинах несущей волны.

На рис. 3 иллюстрируется эволюция амплитуд основной (с волновым числом $K = 20$) и первых трех мод (с волновыми числами $k = 2K, k = 3K$ и $k = 4K$). Для удобства представления на рис. 3 приведены не абсолютные, а приведённые значения амплитуд:

$$b_k = \frac{\overline{a_k - a_k}}{a_k}, \quad (11)$$

где $\overline{a_k}$ – осреднённое во времени значение.

Как видно, амплитуда моды с волновым числом $k = 40$ изменяется точно в противофазе с амплитудой основной моды, а колебания амплитуд более высоких мод в точности повторяют колебания первого возмущения с волновым числом $k = 2K$.

Любопытно, что после осреднения спектра по времени амплитуды возмущений очень напоминают амплитуды волны Стокса для волнового числа K (рис. 4). Это может

означать, что однородный цуг волн в среднем ближе к цугу волн Стокса, чем гармонических волн.

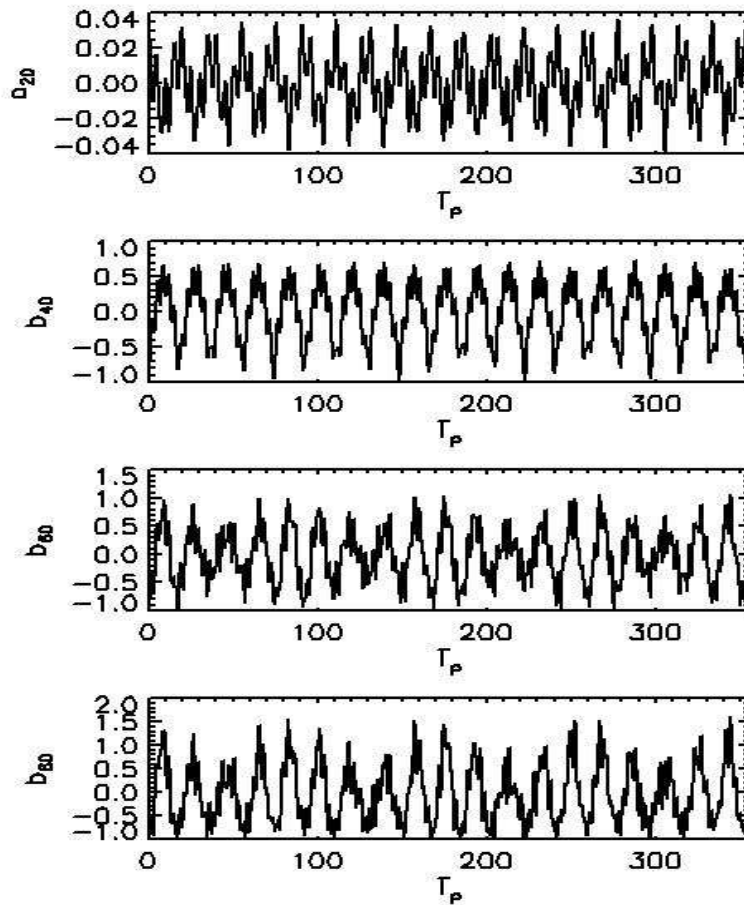


Рис. 3. Эволюция во времени приведенных амплитуд дополнительных мод: a_{20} – амплитуда несущей волны, b_{40}, b_{60}, b_{80} – приведенные амплитуды (см. формулу (11)).

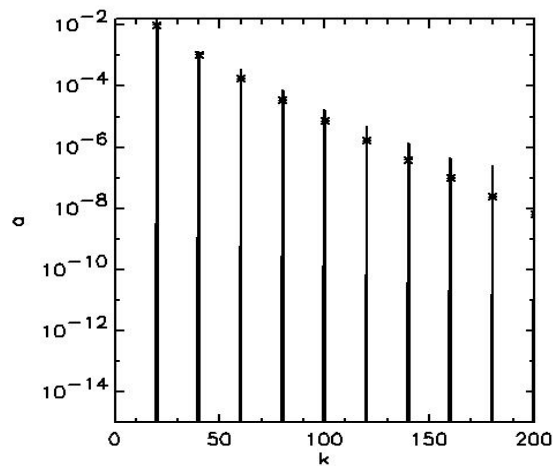


Рис. 4. Осредненные во времени амплитуды волн как функции волновых чисел для начальной крутизны $AK = 0.255$. Звездочки соответствуют амплитудам мод для волны Стокса такой же амплитуды.

Гармонические волны не являются решением точных уравнений потенциальной теории волн, поэтому даже в отсутствии возмущений они претерпевают сложную эволюцию, порождая дискретный спектр нестационарных волн. В среднем этот спектр близок к спектру волн Стокса. Тем не менее, возникшие моды не могут быть отнесены ни к модам волн Стокса, ни к свободным волнам. Проведённые расчёты показывают, что гармонические волны неустойчивы и склонны к распаду. По мере увеличения начальной крутизны волны скорость развития этой неустойчивости увеличивается, а при начальной крутизне AK , превышающей 0.28, неустойчивость приводит к появлению неоднозначной поверхности и обрушению волны [4].

Между тем волны Стокса вплоть до критической крутизны $AK = 0.43$ при отсутствии возмущений вполне устойчивы. При длительных вычислениях неустойчивость Бенджамина-Фейера может возникнуть в результате возмущений, вносимых погрешностью аппроксимации производных по времени, недостаточным разрешением в сеточном пространстве или недостаточной точности представления чисел.

Разумеется, гармонические волны являются надежным базисом для представления волнового поля, однако при вычислении их взаимодействий, в особенности необратимых взаимодействий, обнаруженные выше свойства могут иметь пока непредсказуемые последствия.

Литература

1. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains in deep water // J. Fluid. Mech. 1967. 27. P.417–430.
2. Hasselmann K. Weak-interaction theory of ocean waves. Hamburg: Univ. of Hamburg, 1967. 112 p.
3. Chalikov D., Sheinin D. Direct Modeling of One-dimensional Nonlinear Potential Waves. Nonlinear Ocean Waves. Ed. W.Perrie // Advances in Fluid Mechanics. 1998. 17. P.207–258.
4. Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // Journ. Comp. Phys. 2005. 210. P.247–273.
5. Chalikov D. Statistical properties of nonlinear one-dimensional wave fields // Nonlinear processes in geophysics. 2005. 12. P.1–19.
6. Chalikov D. Numerical simulation of Benjamin-Feir instability and its consequences // Phys. Fluids. 2007. 19.
7. Crapper G.D. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude // J. of Fluid Mech. 2007. 96. P.417–445.
8. Dold J.W. An Efficient Surface-Integral Algorithm Applied to Unsteady Gravity Waves // J. of Comp. Phys. 1992. 103. P.90–115.

Статья поступила в редакцию 29.06.2010 г.

