

УДК 629.12

А.Л.Сухоруков¹

О ВЛИЯНИИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ СВЯЗЯХ НА ДИНАМИКУ МОРСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ОСВОЕНИИ ГЛУБОКОВОДНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НЕФТИ И ГАЗА

В настоящее время наблюдается тенденция к освоению все более глубоких месторождений нефти и газа в связи с истощением запасов углеводородного сырья на суше. При обустройстве таких месторождений приходится использовать длинные якорные связи. Для длинных связей их инерция и конечная скорость распространения продольных упругих деформаций могут влиять как на распределение усилий, так и на динамику заякоренных морских объектов. В работе на основе метода конечных интегральных преобразований Фурье решается задача о вертикальных вынужденных колебаниях TLP-платформы с учетом волновых процессов в длинных якорных связях. В математической модели учитывается вклад сил гидродинамической природы и внутреннего трения в материале связей. Сопоставление результатов, полученных с учетом и без учета волновых процессов в связях, позволяет оценить влияние этого фактора на динамику морских объектов.

В настоящее время наблюдается тенденция к освоению все более глубоких месторождений нефти и газа в связи с истощением запасов углеводородного сырья на суше. Естественно, что при обустройстве таких месторождений для выполнения различных спуско-подъемных операций используются длинные упругие связи. Кроме того, такие связи являются основным конструктивным элементом якорных систем удержания так называемых TLP-платформ. Система удержания этих установок состоит из множества вертикальных гибких связей, закрепленных на морском дне и натянутых за счет избыточной плавучести установки, в качестве которых используются стальные, синтетические канаты либо трубы.

Для длинных связей их инерция и конечная скорость распространения продольных упругих волн могут влиять на распределение усилий в них и на динамику как поднимаемых, так и заякоренных морских объектов. В работах [1, 2] исследовались волновые процессы в упругой связи при подъеме груза со дна моря в условиях волнения. Однако там не учитывалась диссипация энергии за счет сил гидродинамического сопротивления и внутреннего трения, что, естественно, не позволяло дать оценку как усилий в связи, так и максимальных перемещений объекта вблизи резонансных режимов. В работе [3] воздействие гидродинамических сил на поднимаемый объект учтено, но, если не учитывать силы внутреннего трения в материале связи, то это приводит к некорректным значениям усилий и амплитуд колебаний при резонансных режимах на высших гармониках, которые при достаточно длинных связях могут иметь место. Учет сил внутреннего трения в материале связи при развитии подхода, предложенного в [3], представляется весьма затруднительным.

В данной работе для решения задачи о вертикальных вынужденных колебаниях TLP-платформы при воздействии волнения, закрепленной с помощью длинных упругих связей, использовался метод конечных интегральных преобразований Фурье. Данный подход позволяет достаточно эффективно учитывать как влияние сил гидродинамической природы, так и сил внутреннего трения в материале связей, при исследовании движения плавучего объекта.

¹ Центральное конструкторское бюро морской техники «Рубин» (Санкт-Петербург)
© Сухоруков А.Л., 2009

Вертикальные вынужденные колебания ТЛР-платформы, закрепленной с помощью длинных упругих связей. Уравнение вертикальных вынужденных колебаний ТЛР-платформы относительно равновесного положения под действием гармонической силы, моделирующей воздействие волн, может быть записано в виде:

$$M \frac{d^2\mu_1}{dt^2} + \beta \frac{d\mu_1}{dt} + T_{din} + \rho_w g S_{wl} \mu_1 = P \sin \omega t, \quad (1)$$

где M - виртуальная масса, равная сумме масс платформы и присоединенной массы жидкости при вертикальных колебаниях; μ_1 - вертикальное перемещение платформы относительно равновесного положения; β - линеаризованный коэффициент гидродинамического сопротивления платформы; T_{din} - динамическая составляющая силы натяжения якорной связи в точке крепления к платформе (под этой величиной следует понимать обобщенное динамическое усилие от всей системы упругих связей); S_{wl} - площадь ватерлинии платформы; P - амплитуда волновых сил.

Пусть длина якорной связи равна L . Уравнение движения элемента якорной связи с учетом сил внутреннего трения согласно гипотезе Фойгта имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\mu E}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial s^2}, \quad (2)$$

где u - перемещение элемента якорной связи относительно равновесного положения; E - модуль упругости связи, равный произведению модуля упругости материала связи на площадь поперечного сечения, занимаемого волокнами; ρ - масса единицы длины связи, $a = \sqrt{E/\rho}$ - скорость распространения продольных деформаций в связи; μ - коэффициент внутреннего трения в гипотезе Фойгта, согласно которой сила внутреннего трения пропорциональна скорости деформации элемента связи [4].

Обратимся к граничным условиям для уравнения (2). Нижний конец якорной связи закреплен, следовательно $u(0, t) = 0$. Движение верхнего конца совпадает с движением плавучего объекта: $u(L, t) = \mu_1(t)$.

Пусть $v(s, t) = u(s, t) - \mu_1(t) \cdot \frac{s}{L}$. Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \cdot \frac{s}{L}$ и волновое уравнение (2) записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\mu E}{\rho} \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial s^2} - \frac{d^2 \mu_1}{dt^2} \cdot \frac{s}{L}. \quad (3)$$

Умножим обе части уравнения (3) на $\sin \frac{p\pi}{L} s$ и проинтегрируем в пределах от 0 до L . При этом одной верхней чертой над буквой будем обозначать синус-изображение исходной функции по Фурье:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \sin \frac{p\pi}{L} s ds &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^L v \sin \frac{p\pi}{L} s ds; \\ \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \sin \frac{p\pi}{L} s ds &= \left(\frac{\partial v}{\partial s} \sin \frac{p\pi}{L} s \right) \Big|_{s=0}^{s=L} - \int_0^L \frac{\partial v}{\partial s} d \left(\sin \frac{p\pi}{L} s \right) = \\ &= -\frac{p\pi}{L} \int_0^L \frac{\partial v}{\partial s} \cos \frac{p\pi}{L} s ds = -\frac{p\pi}{L} \left[\left(v \cos \frac{p\pi}{L} s \right) \Big|_{s=0}^{s=L} - \int_0^L v d \left(\cos \frac{p\pi}{L} s \right) \right] = \\ &= -\frac{p\pi}{L} \left[\frac{p\pi}{L} \int_0^L v \sin \frac{p\pi}{L} s ds \right] = -\frac{p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v}; \end{aligned}$$

$$\int_0^L -\frac{d^2\mu_1}{dt^2} \cdot \frac{s}{L} \sin \frac{p\pi s}{L} ds = \frac{d^2\mu_1}{dt^2} \frac{L}{p\pi} (-1)^p.$$

В итоге, приходим к следующему уравнению для изображения:

$$\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} + \tilde{\beta} \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{a^2 p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v} = \frac{d^2\mu_1}{dt^2} \frac{L}{p\pi} (-1)^p, \text{ где } \tilde{\beta} = \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho}. \quad (4)$$

Так как собственные колебания интенсивно затухают из-за диссипативных сил, будем искать $\mu_1(t)$ в виде: $\mu_1(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$. Подставляя в (4), получим:

$$\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} + \frac{\mu E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{a^2 p^2 \pi^2}{L^2} \bar{v} = \left[-B_1 \omega^2 \cos \omega t - B_2 \omega^2 \sin \omega t \right] \frac{L}{p\pi} (-1)^p. \quad (5)$$

Решение для $\bar{v}(p)$ ищем в виде: $\bar{v}(p) = D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t$. Подставляя в (5), будем иметь:

$$\begin{aligned} & -D_1(p) \omega^2 \cos \omega t - D_2(p) \omega^2 \sin \omega t + \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho} \left[-D_1(p) \omega \sin \omega t + D_2(p) \omega \cos \omega t \right] + \\ & + \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} D_1(p) \cos \omega t + \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} D_2(p) \sin \omega t = \\ & = \left[-B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \right] \cos \omega t + \left[-B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \right] \sin \omega t. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений для определения $D_1(p)$ и $D_2(p)$:

$$\begin{cases} a_{11}(p)D_1(p) + a_{12}(p)D_2(p) = b_1(p) \\ a_{21}(p)D_1(p) + a_{22}(p)D_2(p) = b_2(p) \end{cases},$$

$$\text{где } a_{11}(p) = a_{22}(p) = \frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2; \quad a_{12}(p) = \omega \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho}; \quad a_{21}(p) = -\omega \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho};$$

$$b_1(p) = -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p; \quad b_2(p) = -B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p.$$

Определитель системы:

$$\Delta(p) = \left[\frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right] + \omega^2 \left[\frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho} \right]^2 \neq 0.$$

Применяя правило Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta_1(p) &= -B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \left[\frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right] - \omega \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho} \left[-B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \right] = ; \\ &= f_{11}(p)B_1 + f_{12}(p)B_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(p) &= \left[-B_2 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \right] \left[\frac{E}{\rho} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} - \omega^2 \right] + \omega \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \frac{\mu E}{\rho} \left[-B_1 \omega^2 \frac{L}{p\pi} (-1)^p \right] = . \\ &= f_{21}(p)B_1 + f_{22}(p)B_2 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда: } D_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} B_2; \quad D_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} B_2. \quad (6)$$

Применяя обратное синус-преобразование Фурье, будем иметь:

$$v(s, t) = \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \left[D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t \right] \sin \frac{p\pi s}{L}.$$

Переходя от переменной v к переменной u , получим:

$$u(s, t) = v(s, t) + \mu_1(t) \frac{s}{L} = \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_1(p) \sin \frac{p\pi s}{L} \cos \omega t + \frac{2}{L} \sum_{p=1}^{\infty} D_2(p) \sin \frac{p\pi s}{L} \sin \omega t + \frac{s}{L} B_1 \cos \omega t + \frac{s}{L} B_2 \sin \omega t = R_1(s) \cos \omega t + R_2(s) \sin \omega t. \quad (7)$$

Тогда динамическая составляющая натяжения будет равна:

$$T_{din}(s, t) = E \frac{\partial u}{\partial s} = E \frac{\partial v}{\partial s} + E \frac{\mu_1(t)}{L} = \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] + \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] \cos \frac{p\pi s}{L}. \quad (8)$$

А динамическая составляющая натяжения в точке крепления якорной связи к платформе:

$$T_{din}(L, t) = \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] + \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t]. \quad (9)$$

Подставляя (9) и выражение для $\mu_1(t)$ в (1), будем иметь:

$$-MB_1\omega^2 \cos \omega t - MB_2\omega^2 \sin \omega t - \beta B_1\omega \sin \omega t + \beta B_2\omega \cos \omega t + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] + \frac{2E}{L} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{L} [D_1(p) \cos \omega t + D_2(p) \sin \omega t] + \rho_w g S_{wl} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] = P \sin \omega t$$

Или с учетом выражений (6):

$$-MB_1\omega^2 \cos \omega t - MB_2\omega^2 \sin \omega t - \beta B_1\omega \sin \omega t + \beta B_2\omega \cos \omega t + \frac{E}{L} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] + \frac{2E\pi}{L^2} \cos \omega t \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \left[\frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} B_2 \right] + \frac{2E\pi}{L^2} \sin \omega t \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \left[\frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} B_1 + \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} B_2 \right] + \rho_w g S_{wl} [B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] = P \sin \omega t. \quad (10)$$

Выделяя в уравнении (10) коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему для определения B_1 и B_2 :

$$\begin{cases} -MB_1\omega^2 + \beta B_2\omega + \frac{E}{L} B_1 + \frac{2E\pi}{L^2} B_1 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{11}(p)}{\Delta(p)} + \frac{2E\pi}{L^2} B_2 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{12}(p)}{\Delta(p)} + \rho_w g S_{wl} B_1 = 0 \\ -MB_2\omega^2 - \beta B_1\omega + \frac{E}{L} B_2 + \frac{2E\pi}{L^2} B_1 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{21}(p)}{\Delta(p)} + \frac{2E\pi}{L^2} B_2 \sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p \frac{f_{22}(p)}{\Delta(p)} + \rho_w g S_{wl} B_2 = P \end{cases}$$

Теперь на основе соотношений (7) и (8) могут быть построены зависимости максимальных безразмерных перемещений в якорной связи $\frac{u_{max}(s)}{u_{stat}} = \frac{\sqrt{R_1^2(s) + R_2^2(s)}}{u_{stat}}$, где

$u_{stat} = \frac{P}{\frac{E}{L} + \rho_w g S_{wl}}$ - перемещение объекта при воздействии постоянной силы P и максимальной безразмерной динамической составляющей натяжения для различных сечений

якорной связи: $\frac{T_{maxdin}(s)}{P}$ в зависимости от частоты возбуждения ω .

Пример расчета. В качестве примера был рассмотрен плавучий объект, закоренный системой из 30 вертикально натянутых стальных тросов диаметром 154 мм. Погон-

ный вес троса: $\rho = 135$ кг/м. Модуль Юнга материала троса: $E_m = 150 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2}$. Также предполагалось, что виртуальная масса объекта равна: $M = 10000$ т; площадь ватерлинии $S_{wl} = 1250 \text{ м}^2$. Длина якорной связи L последовательно принималась равной 1000, 2000 и 4000 м.

Для объекта с заданными параметрами были построены зависимости безразмерных перемещений и суммарных усилий в якорных связях от частоты возбуждения ω (рис. 1). Амплитудное значение сил волнового давления принималось равным: $P = 10^6$ Н.

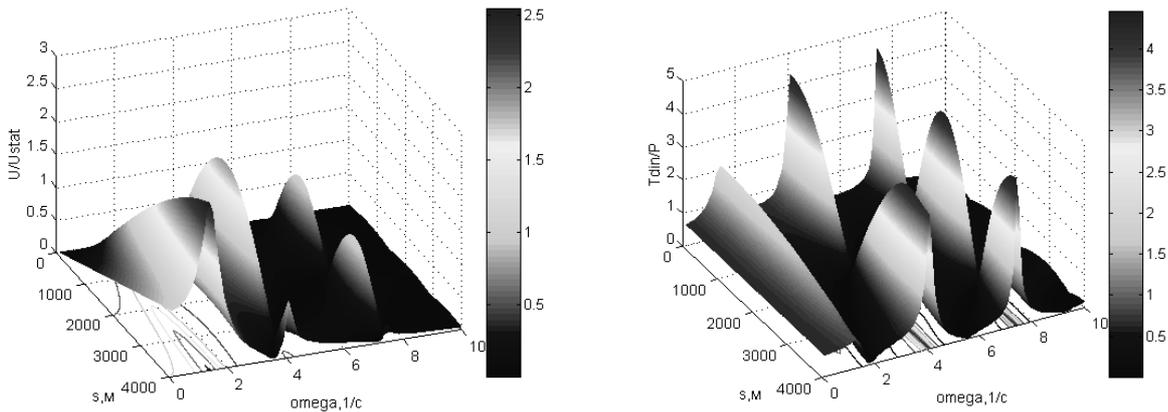


Рис. 1. Максимальные безразмерные перемещения и усилия в связях при $L = 4000$ м

Из рис. 1 видно, что резкое увеличение максимальных усилий и перемещений в связях происходит при приближении частоты возбуждения ω к собственным частотам системы «ТЛР-платформа – якорные связи». По мере увеличения длины связей наблюдается тенденция смещения собственных частот системы к реализуемым частотам спектра морского волнения. Усилия в связях при резонансах на высших собственных частотах оказываются большими, чем при резонансе на основной собственной частоте, однако эти частоты при заданных параметрах системы выходят за пределы спектра морского волнения.

На рис. 2 приведено сопоставление максимальных безразмерных перемещений объекта, полученных в рамках рассматриваемой модели с перемещениями, полученными в рамках модели с одной степенью свободы (без учета волновых процессов в упругих связях) в зависимости от безразмерной частоты возбуждения.

Кривая максимальных безразмерных перемещений для модели с одной степенью свободы, по сути, представляет собой стандартную кривую для коэффициента динамичности. Из рис. 2 видно, что по мере увеличения длины якорных связей наблюдается все большее расхождение между указанными кривыми. При учете волновых процессов в связях, четко выражены резонансы на высших гармониках. Кроме того, максимальные перемещения объекта при резонансном режиме на основной собственной частоте для модели, учитывающей волновые процессы, оказываются большими, чем максимальные перемещения при резонансе на основной собственной частоте, полученные в рамках модели с одной степенью свободы.

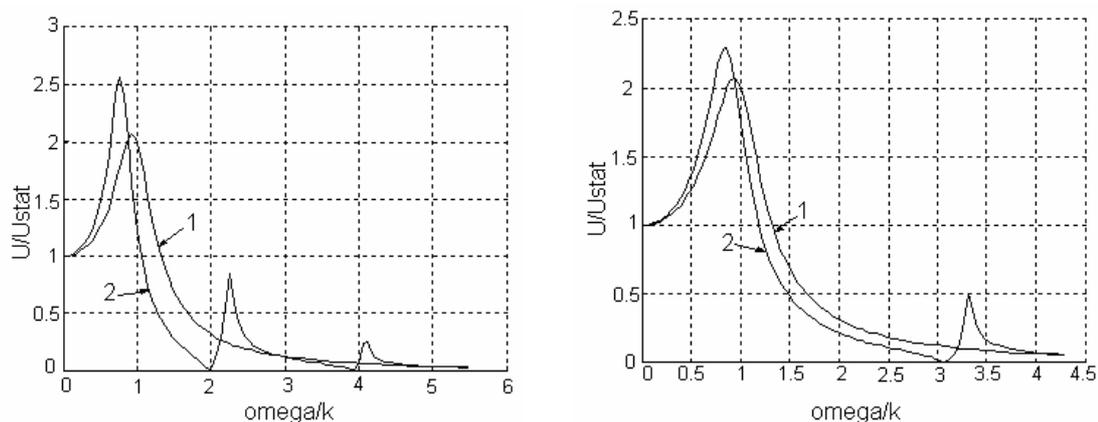


Рис. 2. Сопоставление максимальных безразмерных перемещений платформы в зависимости от безразмерной частоты возбуждения ω/k : 1 - модель с одной степенью свободы; 2 - модель, учитывающая волновые процессы в связях (слева $L = 4000$ м, справа $L = 2000$ м)

* * *

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что учет волновых процессов в длинных упругих связях системы «ТЛР-платформа – якорные связи» необходим при освоении глубоководных месторождений нефти и газа. При значительных длинах этих связей высшие собственные частоты могут попадать в реализуемый спектр частот морского волнения. Учет сил гидродинамической природы и сил внутреннего трения в материале упругих связей важен для корректного определения перемещений морских объектов и усилий в связях, в том числе при резонансных режимах колебаний.

Предложенный в работе для расчета волновых процессов в упругих связях метод конечных интегральных преобразований Фурье позволяет учитывать силы внутреннего трения в материале связей и допускает дальнейшее развитие при усложнении расчетных схем, связанное с введением дополнительных демпфирующих устройств, обеспечивающих уменьшение усилий в связях или уменьшение перемещений морских объектов.

Литература

1. Берто Г.О. Океанографические буи. Л.: Судостроение, 1979.
2. Бугаенко Б.А., Магула В.Э. Специальные судовые устройства. Л.: Судостроение, 1983.
3. Бугаенко Б.А. Динамика судовых спуско-подъемных операций. Киев: Наукова думка, 2004.
4. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1974.
5. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М.: ГИТТЛ, 1956.

Статья поступила в редакцию 29.09.2008 г.