



Тематический выпуск

**СОДЕРЖАНИЕ**

Волны-убийцы в океане ( <i>Предисловие</i> ) .....	4
<b>Статьи</b>	
<b><i>Физические и численные модели больших волн</i></b>	
<i>Чаликов Д.В.</i> Портрет волны-убийцы .....	5
<i>Шамин Р.В.</i> Моделирование волн-убийц на основе эволюционных дифференциальных включений .....	14
<i>Слюняев А.В., Сергеева А.В.</i> Численное моделирование и анализ пространственно-временных полей аномальных морских волн .....	24
<i>Бадулин С.И.</i> Трехмерные волны-убийцы. Еще раз о Новогодней волне .....	37
<i>Кузнецов С., Сапрыкина Я.</i> Экспериментальные исследования возникновения волн-убийц при эволюции узкого спектра крутых волн .....	52
<i>Захаров В.Е., Дьяченко А.И.</i> Вычислительные эксперименты и волны-убийцы ....	64
<i>Шургалина Е.Г., Пелиновский Е.Н.</i> Проявление аномально больших волн зыби на фоне слабого ветрового волнения .....	77
<i>Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н., Родин А.А.</i> Формирование экстремальных волн на мелкой воде с учетом обрушения .....	89
<b>Из истории науки</b>	
<i>Смирнов В.Г.</i> Ф.П. Литке, Э.Х. Ленц и исследование приливов.....	99
<b>Конференции</b> .....	106
<b>Хроника</b> .....	113
Правила представления материалов в редакцию.....	115

## CONTENTS

### Articles

#### *Physical and Numerical Models of Giant Waves*

- Chalikov D.V.* The Portrait of Freak Wave ..... 5

The methods of extreme waves modeling are discussed. The exact one-dimensional model for potential waves is used for simulation of extreme wave up to onset of breaking. The evolution of wave shape and its energy are represented. The destroying properties of wave are discussed.

**Key words:** conformal mapping, numerical modeling, surface waves, extreme waves, waves-killers.

- Shamin R.V.* Modeling of Rogue Waves on the Basis of Evolutionary Differential Inclusions 14

Evolutionary differential inclusions as generalization of the dynamic equations describing superficial waves on water are considered. The correctness of approximation of the initial equations by means of differential inclusions is shown. Application of differential inclusions as methods of data of the initial equations to systems of the ordinary differential equations, and also applications of the received disperse dynamic systems for a substantiation of computing experiments is shown.

**Key words:** rogue waves, differential inclusions, dynamic systems.

- Slunyaev A.V., Sergeeva A.V.* Numerical Simulations and Analysis of Spatio-Temporal Fields of Rogue Waves ..... 24

The approach to generation by virtue of numerical simulations and analysis of realistic strongly nonlinear gravity wave fields is given. The waves are represented by temporal-spatial surface elevation fields. The obtained information is used with the purpose of building up spatial and temporal sequences of surface elevation, study of the spatio-temporal nonlinear wave dynamics, detailed analysis of rogue events and their evolution. The paper reports on preliminary results of the wave processing, which emphasize the rich variety of rogue wave shapes observed in the numerical simulations.

**Key words:** rogue waves, freak waves, sea surface waves, numerical simulations.

- Badulin S.I., Ivonin D.V.* Three-Dimensional Freak Waves. Once More on New Year Wave 37

The simplest weakly nonlinear models of three-dimensional water waves are presented. The spatio-temporal spectral estimates of the New Year Wave record show a pronounced effect of the harmonic  $f_{3/2} = 3/2 f_m$ ,  $f_m$  – spectral peak frequency) that corresponds to the maximum of five-wave instability and a harmonic with an intermediate frequency that can be related to the well-known modulational four-wave instability. The results are discussed in the context of possible scenarios of freak wave occurrence.

**Key words:** freak waves, wind-driven waves, modulational instability, resonant interactions.

- Kuznetsov S.Yu., Saprykina Ya.V.* Experimental Investigations of Freak Waves Arising During the Evolution of Narrow Spectrum of Steep Waves ..... 52

Process of freak waves formation as a result of transformation of initial narrow wave spectrum considered on the base of laboratory experiments. It is demonstrated that downshifting of spectral maximum occurs during the propagation of steep initially monochromatic and bichromatic waves. This downshifting is the main reason of variability of amplitude-frequency contents of individual waves and, as sequence, the freak wave's formation. In paper is considered how the evolution of spectrum depends on initial steepness of waves and spectral wideness.

**Key words:** freak waves, modulation instability, wave group structure, discrete frequency downshifting.

*Zakharov V.E., Dyachenko A.I.* Numerical Experiments and Freak Waves .....

64

In the article the problem of appearance of freak wave at the surface of deep water is considered. Two analytical models are proposed for two-dimensional ideal fluid. The first model is based on the conformal mapping in the exact Euler equations of the domain occupied by the fluid to the lower half-plane. In the second model canonical transformation is applied for approximate Hamiltonian. Simple nonlinear equation for normal canonical variable is derived as the result. Numerical experiments are performed to simulate freak wave formations for both models.

**Key words:** freak waves, free-surface hydrodynamics, conformal mapping, Zakharov's equation, numerical simulation.

*Shurgalina E., Pelinovsky E.* Development of Freak Swell Wave in a Weak Wave Field .....

77

Interference of unidirectional swell and wind waves in deep water in frameworks of linear potential theory is considered. Wind waves are described by Pierson–Moskowitz spectrum, and swell – by the frequency-modulated wave packet. It is noticed that in case of a variable wind in a storm area the swell waves can be focused on some distance from the origin area, forming abnormal big waves («freak waves»). A visibility of the freak wave swell of different shapes in wind wave field is examined.

**Key words:** water waves, wind waves, freak waves, dispersive focusing, life-time of freak waves.

*Didenkulova I., Pelinovsky E., Rodin A.* Formation of Shallow Water Rogue Waves Taking into Account Wave Breaking Effects .....

89

Formation of extreme waves (rogue waves) in a basin of constant depth is studied in the framework of nonlinear shallow water theory. It is shown that unidirectional propagation of non-breaking waves does not lead to the increase in the probability of rogue wave occurrence, though the wave field deviates from Gaussian. Wave breaking effects do not influence on this result, although in the case of large-amplitude waves the reflected wave appears and in the case of irregular wave field it may contribute to the formation of rogue wave as the result of wave collision. At the same time the collision of long irregular waves with a smooth profile and wave collision with a vertical wall increases the probability of rogue wave occurrence. The contribution of the wave breaking in this case is studied for different scenarios of wave collision for waves of different amplitudes.

**Key words:** water waves, long waves, nonlinear waves, rogue waves, wave breaking.

## Волны-убийцы в океане

Настоящий специальный выпуск журнала «Фундаментальная и прикладная гидрофизика» является продолжением предыдущего выпуска (т.4, № 4), посвященного теме «Волны-убийцы в морях и океанах». Если в первом выпуске были собраны экспериментальные и «наблюдательные» статьи, то во втором обсуждаются теоретические проблемы описания физических механизмов появления волн-убийц, их численного и лабораторного моделирования, статистических свойств. Напомним читателям, что под волнами-убийцами в настоящее время понимаются неожиданно возникающие на короткое время аномально большие волны, высота которых превышает значительную высоту ветрового волнения в два раза и более. Пока еще не совсем ясно, являются ли они частью экстремальных волн, всегда изучаемых в океанологии (под последними в теории обычно понимались волны большой амплитуды, в статистическом смысле описываемые теми же закономерностями, что и более слабые волны), или же это новый класс волновых движений, не имеющий аналога в ансамбле ветровых волн. Собранные здесь статьи демонстрируют различные подходы к описанию феномена «волны-убийцы», и полученные результаты позволяют существенно продвинуться в понимании этих волн, их свойств и статистики. В большинстве случаев для численного моделирования аномально больших волн используются сильнонелинейные физические модели ветровых волн, основанные на уравнениях Эйлера, что позволило описать волны большой амплитуды вплоть до их обрушения. Данные лабораторного моделирования и наблюдений волн-убийц в натуральных условиях активно используются как для тестирования численных моделей, так и для интерпретации реальных данных, что абсолютно необходимо для понимания природы описываемых волн.

Выпуск специальных номеров журнала «Фундаментальная и прикладная гидрофизика» с участием авторов, работающих как в России, так и за рубежом, является первым в русскоязычной литературе изданием, специально посвященным феномену волн-убийц в морях и океанах.

*Е.Н. Пелиновский, А.В. Слюняев*

УДК 532.5.013

© В.Е. Захаров, А.И. Дьяченко, 2012

Новосибирский государственный университет  
 Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка  
 Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва  
 University of Arizona, Department of Mathematics, USA  
 zakharov@math.arizona.edu

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И ВОЛНЫ-УБИЙЦЫ

Рассмотрена задача об образовании волн-убийц на поверхности глубокой воды. Предложены две аналитические модели для двухмерной идеальной жидкости. Первая основана на точных уравнениях Эйлера, в которых сделано конформное преобразование области занимаемой жидкости на полуплоскость. Во второй, приближенной, предложено каноническое преобразование переменных в гамильтониане, в результате чего получено простое нелинейное уравнение для нормальной канонической переменной. Численно изучено образование волны-убийцы в рамках обеих моделей.

**Ключевые слова:** волны-убийцы, гидродинамика жидкости со свободной поверхностью, конформное преобразование, уравнение Захарова, численное моделирование.

Двухмерное потенциальное течение идеальной глубокой жидкости в области со свободной поверхностью представляет собой один из классических объектов исследований гидродинамики. Удобный подход описания потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью для произвольной размерности пространства основан на использовании канонического формализма, известного с 1968 г. [1]. Пусть несжимаемая жидкость занимает в плоскости  $(x, y)$  область, ограниченную свободной поверхностью:

$$y = \eta(x, t), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

Будем считать течение жидкости потенциальным  $V = \nabla\phi$ , где  $\phi$  подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0. \quad (2)$$

Это уравнение должно быть рассмотрено вместе со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + g\eta = P, \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} + \eta_x \phi_x = \phi_y \quad (3)$$

при  $y = \eta(x, t)$  и

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \quad y \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Здесь  $g$  – гравитационное ускорение, а  $P$  – постоянное давление на поверхности (не нарушая общности, полагаем  $P = 0$ ). Система уравнений (3) и (4) является гамильтоновой. Введем величину  $\psi$  – значение потенциала на свободной поверхности:

$$\psi(x, t) = \phi(x, y, t)|_{y=\eta} = \phi(x, \eta(x, t), t). \quad (5)$$

Как было установлено в [1],  $\eta(x, t)$  и  $\psi(x, t)$  являются канонически сопряженными величинами:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad (6)$$

а гамильтониан  $H$  совпадает с полной энергией жидкости:

$$H = T + UT = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dy U = \frac{g}{2} \int \eta^2 dx. \quad (7)$$

Уравнения (3) в этом случае следуют из вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta S = 0, \quad S = \int L dt, \quad L = \int \psi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx - H. \quad (8)$$

Здесь мы будем говорить в основном о двухмерной жидкости и рассмотрим два подхода к описанию таких течений (иными словами, к решению уравнений (3), (4)).

1. Точные уравнения, в которых сделано конформное преобразование области, занимаемой жидкостью на нижнюю полуплоскость.

2. Приближенные, кубически нелинейные уравнения, в которых сделано каноническое преобразование, максимально упрощающее их вид.

Развитие методов численного моделирования волн на поверхности жидкости дало возможность проводить вычислительные эксперименты, в ходе которых можно наблюдать существенно нелинейную динамику волн. Мы будем говорить о приложении этих методов к задаче образования волн-убийц на поверхности жидкости. Предполагаем, что термин «волна-убийца» знаком читателю. Подробное описание этого явления можно найти в работах [2–4].

**Конформные уравнения в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости.** Применение конформных преобразований в задачах потенциального течения идеальной жидкости имеет большую историю. Однако традиционным является использование конформных преобразований в стационарных задачах. Идея использования конформных переменных для нестационарных задач была высказана в работе Л.В.Овсянникова [5]. Им были получены нестационарные уравнения, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости со свободной поверхностью. Это уравнение для конформного преобразования и уравнение для потенциала на границе полуплоскости. Уравнения получаются интегро-дифференциальные. Далее, в работах [6–10], были получены новые формы уравнений в конформных переменных, описывающих нелинейную динамику поверхностных волн. Эти уравнения и были использованы для проведения вычислительных экспериментов по изучению волн-убийц. Математическая корректность уравнений в конформных переменных была установлена в работе [11].

Изложим краткий вывод таких уравнений. Для того чтобы упростить уравнения (3) и (4), необходимо сделать конформное преобразование [12] области на  $z$ -плоскости, занимаемой жидкостью, на нижнюю полуплоскость комплексной переменной  $w = u + iv$ :

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0.$$

После такого преобразования граница жидкости будет задаваться параметрически действительной и мнимой частями конформного преобразования, взятого на вещественной оси:

$$y = y(u, t), \quad x = x(u, t) = u + \tilde{x}(u, t); \quad (9)$$

здесь вещественная и мнимая части –  $\tilde{x}(u, t)$  и  $y(u, t)$  – связаны между собой преобразованием Гильберта:

$$y = \hat{H}\tilde{x}, \quad \tilde{x} = -\hat{H}y, \quad \hat{H}^2 = -1 \text{ и } \hat{H}(f(u)) = P.V. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u}.$$

После конформного преобразования  $\phi(x, y, t) \rightarrow \phi(u, v, t)$ . Пусть  $\Psi(u, t) = \phi(u, 0, t)$  – значение потенциала на свободной поверхности. Тогда кинетическая энергия (7) принимает следующий вид:

$$T = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du, \quad (10)$$

а для вычисления симплектической формы в Лагранжиане (8) имеем

$$dx = x_u du, \quad \eta_t dx = (y_t x_u - x_t y_u) du \quad (11)$$

и Лагранжиан выражается как

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi (y_t x_u - x_t y_u) du + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du - \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du + \int_{-\infty}^{\infty} f(y - \hat{H}\tilde{x}) du. \quad (12)$$

Здесь  $f$  – множитель Лагранжа. Варьируя действие  $S$  по  $\Psi$  и  $y$  [12], получим, что  $y(u, t)$  и  $\Psi(u, t)$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$y_t = (y_u \hat{H} - x_u) \frac{\hat{H} \Psi_u}{J}, \quad (13)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + \hat{H} \Psi_u^2}{2J} + \hat{H} \left( \frac{\hat{H} \Psi_u}{J} \right) \Psi_u + \frac{\hat{H} \Psi_u}{J} \hat{H} \Psi_u - gy, \quad (14)$$

где  $g$  – это ускорение силы тяжести, а

$$J = x_u^2 + y_u^2 = 1 + 2\tilde{x}_u + \tilde{x}_u^2 + y_u^2. \quad (15)$$

Другая форма уравнений (13) и (14), полученная в работе [12], выглядит так:

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H} \Psi_u, \quad \Psi_t x_u - x_t \Psi_u + g y x_u = \hat{H} (\Psi_t y_u - y_t \Psi_u + g y y_u). \quad (16)$$

Интегралы движения приобретают следующий вид:

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du + \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du, \quad M = \int_{-\infty}^{\infty} y x_u du, \quad P_y = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi x_u du, \quad P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi y_u du. \quad (17)$$

Если уж мы применили конформное преобразование и используем комплексный потенциал скорости, то следует вместо вещественных уравнений (13) и (14) написать комплексные уравнения для  $z(w, t)$  и комплексного потенциала скорости  $\Phi(w, t)$ . Эти уравнения можно получить, применяя оператор проектирования

$$\hat{P}(f) = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})(f)$$

к уравнениям (13) и (14):

$$z_t = iUz_u, \Phi_t = iU\Phi_u - \widehat{P}\left(\frac{|\Phi_u|^2}{|z_u|^2}\right) + ig(z-u). \quad (18)$$

Здесь  $U$  – комплексная скорость переноса:

$$U = 2\widehat{P}\left(\frac{-\widehat{H}\Psi_u}{|z_u|^2}\right).$$

Оказалось, что уравнения (18) могут быть упрощены просто заменой переменных. Действительно, вместо переменных  $z(w,t)$  и  $\Phi(w,t)$  введем новые функции –  $R(w,t)$  и  $V(w,t)$  – следующим образом:

$$R = \frac{1}{z_w}, \quad \Phi_w = -iVz_w \quad (19)$$

( $V = i\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ , т.е. комплексная скорость). Заметим, что, поскольку  $z(w,t)$  является конформным преобразованием, его производная существует в нижней полуплоскости и не имеет там нулей. Таким образом, функция  $R(w,t)$  также является аналитической в нижней полуплоскости и имеет следующие граничные условия:

$$R(w,t) \rightarrow 1, |w| \rightarrow \infty, Im(w) \leq 0.$$

Очевидно, что для  $V$  граничные условия выглядят так:

$$V(w,t) \rightarrow 0, |w| \rightarrow \infty, Im(w) \leq 0.$$

Тогда для этих функций уравнения приобретают весьма изящную форму:

$$R_t = i(UR' - U'R), \quad V_t = i(UV' - R\widehat{P}'(V\bar{V})) + g(R-1). \quad (20)$$

Здесь  $U = \widehat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R)$ .

Полученные уравнения кубически нелинейны и включают в себя линейный интегральный оператор. Они являются уравнениями гидродинамического типа, но действуют в комплексной плоскости. Важную роль в этих уравнениях играет комплексная скорость переноса  $U$ . Она переносит нули функции  $R(w,t)$ , которые являются особыми точками конформного отображения  $z(w,t)$ . Разные типы нулей предполагается изучить в следующей статье. Здесь же следует отметить, что в численном моделировании наблюдаются лишь корневые ( $\sqrt{w}$ ) точки ветвления.

В уравнениях (20) легко учесть и поверхностное натяжение, надо заменить лишь второе уравнение на

$$V_t = i(UV' - R\widehat{P}'(V\bar{V}) + g(R-1)) - 2\sigma R\widehat{P}'(Q'\bar{Q} - \bar{Q}'Q),$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения, а  $Q = \sqrt{R}$ .

Следует отметить, что уравнения (20) сохраняют свою форму и для других граничных условий. Например, вместо граничных условий (4) можно рассмотреть периодические условия, а также жидкость конечной глубины.

Отметим также, что новые уравнения включают в себя только производные конформного отображения и комплексного потенциала скорости.

**Модуляционная неустойчивость и волна-убийца.** В этом параграфе мы изучаем модуляционную неустойчивость волны Стокса. В качестве начального условия мы

используем стационарную нелинейную волну Стокса с длинноволновой модуляцией. Эта волна неустойчива относительно роста модуляции длинного масштаба. Этот замечательный факт был сначала установлен в [13], который вычислил инкремент неустойчивости в пределе длинноволновой модуляции. Поскольку инкремент Лайтхилла был пропорционален волновому числу модуляции, результат был в принципе неполон: в коротких масштабах неустойчивость должна отсутствовать. Точный инкремент был найден независимо в [1, 14, 15].

Для численного моделирования мы, начиная с 2001 г. (работа [7]), перешли к численному решению уравнений (20). И для этого имеются веские причины. Было установлено, сначала эмпирически, а затем с объяснением (в [16]), что численное решение уравнений (20) для переменных  $R$  и  $V$  является наиболее устойчивым. Численный код для решения этих уравнений был разработан в работе [8].

Мы используем спектральный метод для численного решения уравнений (20). Следует отметить, что конформное преобразование – обычный подход, неоднократно применявшийся для изучения волны Стокса. Уравнения для ее коэффициентов Фурье-разложения были решены численно многими авторами (см., напр., [17]). Идея осуществления конформного преобразования при численном моделировании динамики волны появилась в начале 1980-х годов [18]. Но поскольку уравнения (20) в то время не были известны, авторы использовали квазилагранжевый подход в гидродинамике. После некоторых экспериментов и обсуждения их результатов идея использования конформного преобразования перестала казаться привлекательной по следующей причине: конформное преобразование не очень хорошо для описания особенностей с углом на поверхности, естественно появляющегося на свободной поверхности жидкости. Эта причина серьезна, если пространственная разностная сетка редка. Однако современные компьютеры делают возможным использовать очень точные разностные сетки, состоящие из больше чем миллиона узлов или спектральных мод. Таким образом, этот аргумент перестал быть актуальным.

Следует отметить, что эти уравнения не являются обычными уравнениями в частных производных. Их можно назвать «Гильберт-дифференциальными» уравнениями, которые наряду с обычным дифференцированием по  $u$

$$f \rightarrow \partial f / \partial u \quad (21)$$

включают в себя интегральное преобразование Гильберта:

$$f \rightarrow \hat{H} f . \quad (22)$$

С аналитической точки зрения две эти операции совершенно различны. Но с точки зрения численного решения – очень похожи. Действительно, для Фурье-гармоник операция (21) означает

$$f_k \rightarrow ikf_k ,$$

а преобразование (22) соответствует

$$f_k \rightarrow i \text{sign}(k) f_k .$$

С вычислительной точки зрения две эти операции – одинакового уровня трудности.

В численных экспериментах исследовалась локализация энергии в первоначальном, почти однородном цуге волн Стокса. Моделирование проводилось в периодической области  $2\pi$ , так что волновые числа – это целые числа. Гравитационная постоянная  $g = 1$ . Волна Стокса характеризуется крутизной (steepness)  $\mu = ak_0$  ( $k_0$  – волновое число,  $a$  – амплитуда волны). Если  $\mu \ll 1$ , волна Стокса является почти

монохроматической. В этой серии экспериментов  $\mu = 0.1$ . Столь малая крутизна позволяет взять в качестве начальных данных суперпозицию монохроматической волны (с  $k_0 = 100$ ) и возмущения (Гауссов шум в Фурье-спектре). Количество Фурье-гармоник, задействованных в вычислениях, было сравнительно небольшим – 12 288 (это  $4096 \times 3$ ).

Инкремент модуляционной неустойчивости:

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} \left( \left( \frac{\delta k}{k_0} \right)^2 (ak_0)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\delta k}{k_0} \right)^4 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$  – частота волны, а  $\delta k$  определяет неустойчивые гармоники, такие что  $k_1 = k_0 + \delta k$ ,  $k_2 = k_0 - \delta k$ .

Максимальное значение инкремента

$$\gamma_{\max} = \omega_0 \cdot \frac{1}{2} (ak_0)^2 \quad (24)$$

достигается для возмущения с волновым числом  $p$ :

$$p = \sqrt{2} (ak_0) \cdot k_0. \quad (25)$$

Профиль волны Стокса определяется стационарным уравнением  $y = \frac{c^2}{2g} (1 - |R|^2)$ , а скорость  $V$  связана с формой поверхности как  $V = ic(R - 1)$ .

Возмущение вносилось в амплитуду первой гармоники, т.е.

$$R_{100} \rightarrow (1 + 0.05)R_{100}.$$

Начальный профиль поверхности показан на рис. 1 (при  $t = 0$ ), Фурье-спектр начального условия – на рис. 2.

После достаточно большого времени (более 1300 волновых периодов) наблюдается формирование волны-убийцы, как показано на рис. 3. Эта волна вырастает до своего максимального уровня на несколько волновых периодов, после чего исчезает или опрокидывается. Детальная форма волны-убийцы показана на рис. 4.

Уравнения в конформных переменных позволяют моделировать такое опрокидывание. На рис. 5 показан момент опрокидывания для аналогичного численного эксперимента, но с  $\mu = 0.14$ .

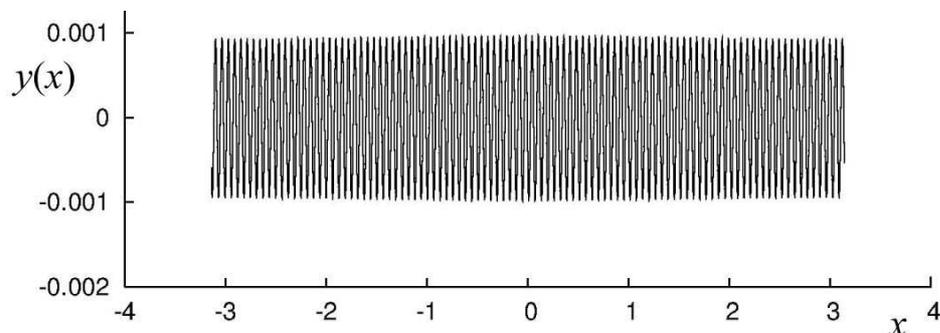


Рис. 1. Начальный профиль волны.

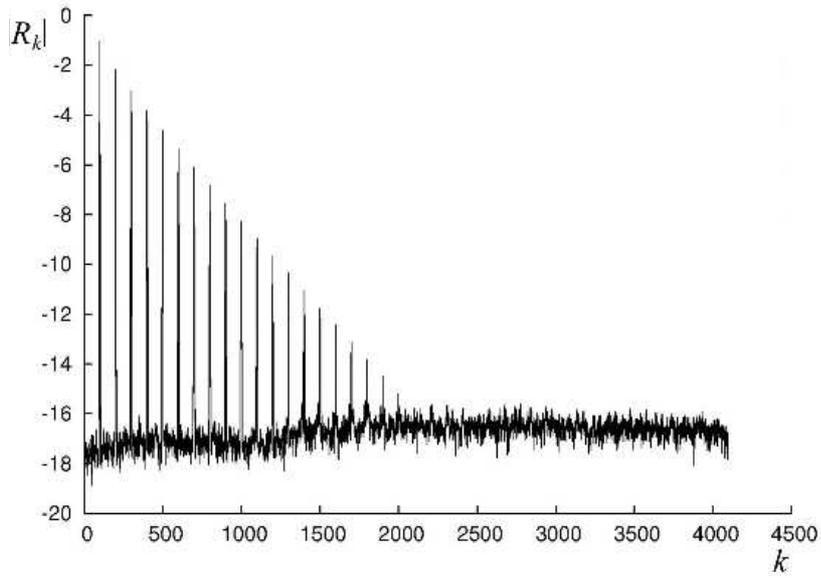


Рис. 2. Фурье-коэффициенты  $|R_k|$  при  $t = 0$  ( $\mu \cong 0.095$ ).

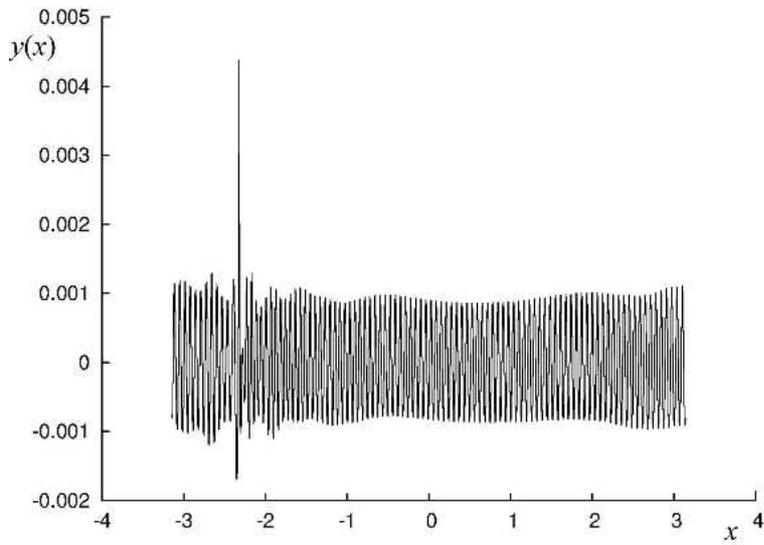


Рис. 3. Волна-убийца при  $T = 802.07$ .

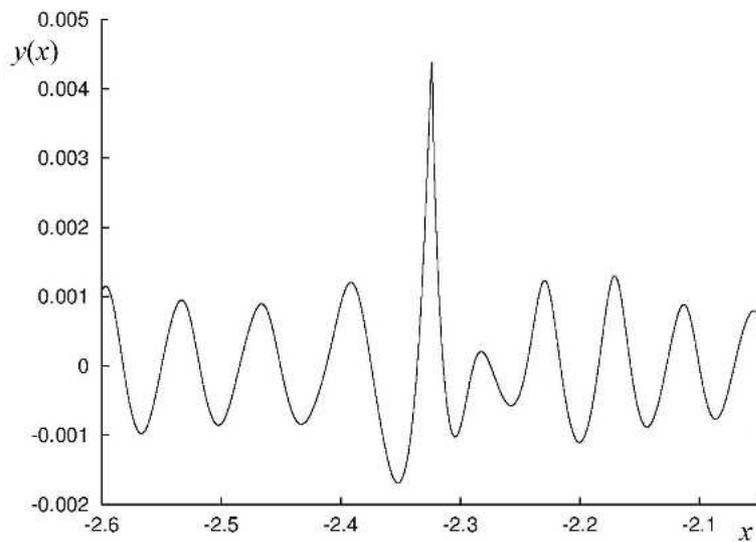
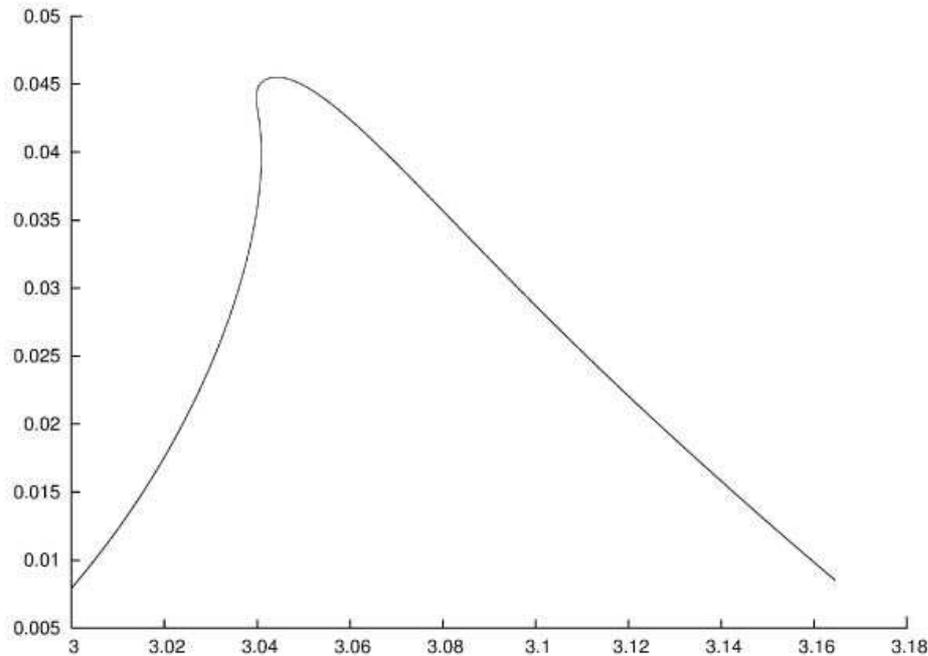


Рис. 4. Поверхность с высоким разрешением при  $T = 802.07$ .

Рис. 5. Профиль опрокидывающейся волны с  $\mu = 0.14$ .

**Гигантский бризер.** Численное моделирование в рамках полностью нелинейных уравнений демонстрирует существование гигантского бризера на поверхности глубокой воды. Мы проводили следующий эксперимент. В качестве начальных условий для профиля поверхности выбиралось солитонное решение нелинейного уравнения Шредингера:

$$\eta(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2k_0^2}} \frac{\cos(k_0 x)}{\cosh(\lambda x)}, \quad (26)$$

в котором параметры  $\lambda$  и  $k_0$  выбирались далеко за пределами применимости уравнения Шредингера, а именно – моделирование проводилось в периодической области размером  $L = 2\pi$  и  $k_0 = 50$ . Величина  $\lambda$  менялась в пределах от 30 до 50. Потенциал скорости на поверхности жидкости в начальный момент был равен  $\psi(x) = c\eta(x)$ , где  $c$  – линейная фазовая скорость. Через некоторое время, после того как начальный бризер излучает «лишнее», мы наблюдали устойчивую локальную структуру, сходную качественно с солитоном НУШ, но с крутизной порядка 0.5–0.6. Этот гигантский бризер, представленный на рис. 6, является устойчивым.

Если увеличить центральную часть бризера, как на рис. 7, то легко видеть, что его крутизна близка к предельной  $1\sqrt{3} = 0.57735$ .

Устойчивость бризера продемонстрирована на рис. 8, где бризер движется на фоне волнения малой амплитуды, не взаимодействуя с ним.

Отсутствие излучения из бризера демонстрирует также и пространственно-временной спектр поверхности (рис. 9), в котором отсутствуют отрицательные частоты. Видно, что бризер состоит из волн, движущихся только в одном направлении.

Такая ситуация характерна для интегрируемых систем. Но эта гипотеза нуждается в проверке.

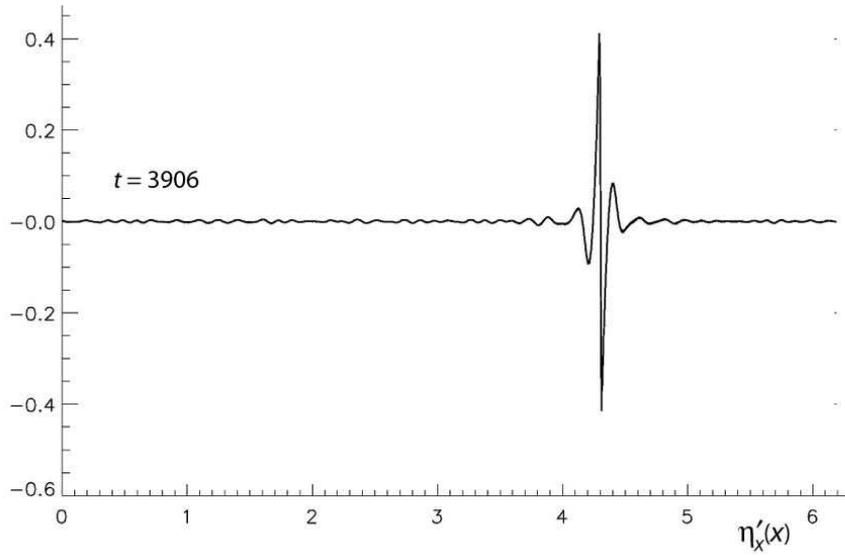


Рис. 6. Устойчивый бризер.

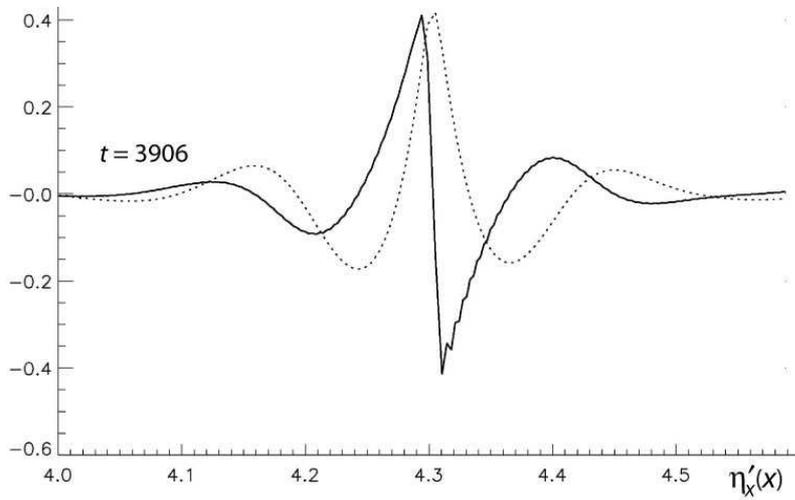


Рис. 7. Почти предельная крутизна.

Пунктирная линия соответствует профилю поверхности, умноженному на  $k_0 = 50$ .

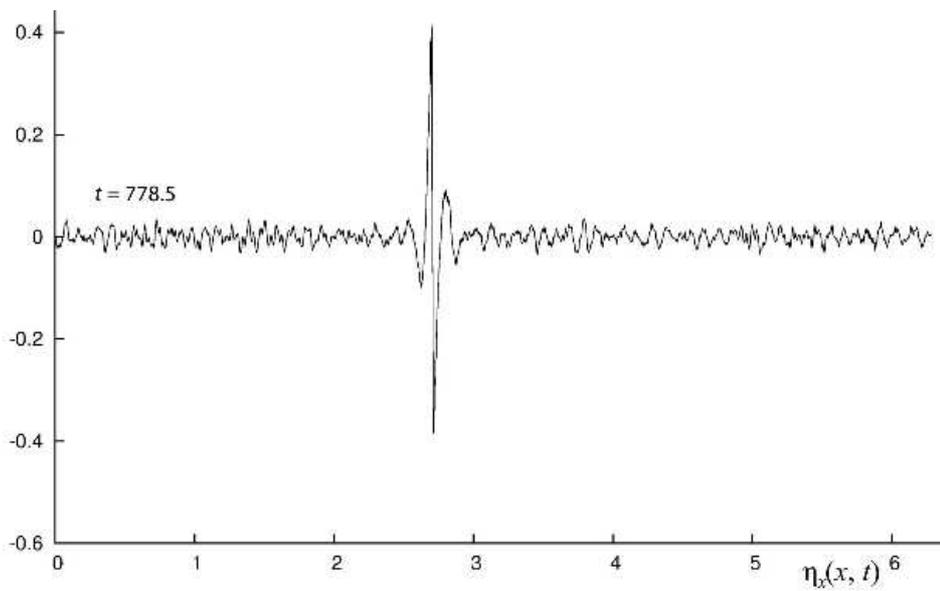


Рис. 8. Бризер и волны малой амплитуды.

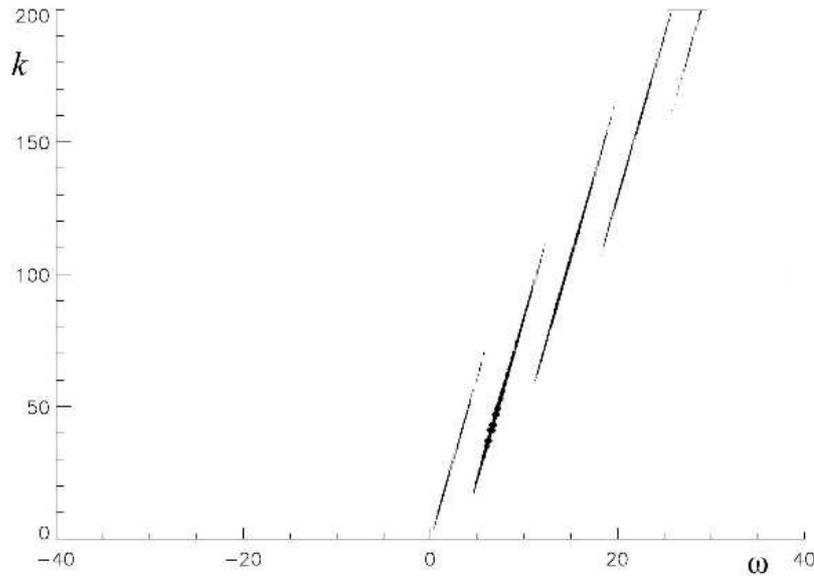


Рис. 9. Пространственно-временной спектр бризера.

**Компактные уравнения для глубокой воды.** В этом параграфе мы рассмотрим приближенные уравнения динамики поверхности глубокой воды. Для начала запишем приближенный гамильтониан (до четвертого порядка по нелинейности включительно) в терминах канонических переменных  $\eta(x, t)$  и  $\psi(x, t)$ :

$$H = \frac{1}{2} \int (\psi \hat{k} \psi + g \eta^2) dx + \frac{1}{2} \int \eta \{ \psi_x^2 - (\hat{k} \psi)^2 \} dx + \frac{1}{2} \int \eta (\hat{k} \psi) \{ \hat{k} (\eta (\hat{k} \psi)) + \eta \psi_{xx} \} dx.$$

Оказывается, что этот гамильтониан может быть существенно упрощен. Это упрощение базируется на двух фактах:

1) в [19] было показано, что четырехволновый коэффициент для двумерной жидкости равен нулю на резонансной поверхности  $k + k_1 = k_2 + k_3$ ,  $\omega_k + \omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$ ;

2) в [20, 21] и на рис. 9 было показано, что бризер состоит из волн, движущихся в одном направлении без излучения.

Эти два факта позволяют применить каноническое преобразование для гамильтониана, которое существенно его упрощает. Это преобразование подробно представлено в работах [22, 23]. Здесь мы лишь коротко изложим идею и результат. Сначала вместо вещественных канонических переменных  $\eta(x, t)$  и  $\psi(x, t)$  введем нормальные канонические переменные  $a_k$  следующим образом:

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}} (a_k + a_{-k}^*) \quad \psi_k = -i \sqrt{\frac{g}{2\omega_k}} (a_k - a_{-k}^*).$$

Здесь  $\omega_k = \sqrt{gk}$  – частота гравитационных волн, а Фурье-преобразования  $\psi(x) \rightarrow \psi_k$  и  $\eta(x) \rightarrow \eta_k$  определены как

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_k e^{+ikx} dk.$$

Переменные  $a_k$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0.$$

Далее переходим от  $a_k$  к новым нормальным каноническим переменным  $b_k$  так, чтобы исключить нерезонансные кубические члены в гамильтониане. Это преобразование описано в [1, 24, 25]:

$$\begin{aligned} a_k = & b_k + \int \Gamma_{k_1 k_2}^k b_{k_1} b_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} dk_1 dk_2 - 2 \int \Gamma_{kk_1}^{k_2} b_{k_1}^* b_{k_2} \delta_{k+k_1-k_2} dk_1 dk_2 + \\ & + \int \Gamma_{kk_1 k_2} b_{k_1}^* b_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} dk_1 dk_2 + \int B_{kk_1}^{k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ & + \int C_{kk_1 k_2}^{k_3} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3} \delta_{k+k_1+k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \int S_{kk_1 k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3}^* \delta_{k+k_1+k_2+k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Правильный выбор  $B_{kk_1}^{k_2 k_3}$  позволяет существенно упростить гамильтониан, который записывается в компактном, элегантном виде в  $X$ -пространстве:

$$H = \int b^* \hat{\omega}_k b dx + \frac{1}{4} \int |b'|^2 \left[ \frac{i}{2} (bb^* - b^* b') - \hat{k} |b|^2 \right] dx. \quad (28)$$

Соответствующее уравнение движения имеет следующий вид:

$$i \frac{\partial b}{\partial t} = \hat{\omega}_k b + \frac{i}{8} \left[ b^* \frac{\partial}{\partial x} (b'^2) - \frac{\partial}{\partial x} (b^* \frac{\partial}{\partial x} b^2) \right] - \frac{1}{4} \left[ b \cdot \hat{k} (|b'|^2) - \frac{\partial}{\partial x} (b' \hat{k} (|b|^2)) \right]. \quad (29)$$

Его простейшее решение – монохроматическая волна

$$b(x) = B_0 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (30)$$

с частотой

$$\omega_0 = \omega_{k_0} + \frac{1}{2} k_0^3 |B_0|^2. \quad (31)$$

Инкремент модуляционной неустойчивости теперь имеет вид

$$\gamma_k^2 = \frac{1}{8} \frac{\omega_{k_0}^2}{k_0^4} (1 - 6\mu^2) k^2 \left[ \mu^2 (k_0 - \frac{|k|}{2})^2 - \frac{k^2}{8} \right].$$

Отличие между инкрементом, полученным в рамках НУШ, отмечено жирным шрифтом.

**Численный эксперимент.** Было проведено численное моделирование образования волны-убийцы, аналогичное описанному выше, но теперь в рамках компактного уравнения (29). Типичная картина образования волны-убийцы представлена на рис. 10.

Компактное уравнение (29) описывает волну-убийцу почти так же хорошо, как и полностью нелинейные уравнения (3), существенно превосходит НУШ и уравнение Дысте. Его легко обобщить для трехмерной жидкости, получая течение «почти» двумерным, в духе уравнения Кадомцева–Петвиашвили для уравнения Кортевега де-Вриза, полагая частоту двумерной:

$$H = \int b^* \hat{\omega}_{k_x, k_y} b dx dy + \frac{1}{4} \int |b'_x|^2 \left[ \frac{i}{2} (bb^* - b^* b'_x) - \hat{k}_x |b|^2 \right] dx dy. \quad (32)$$

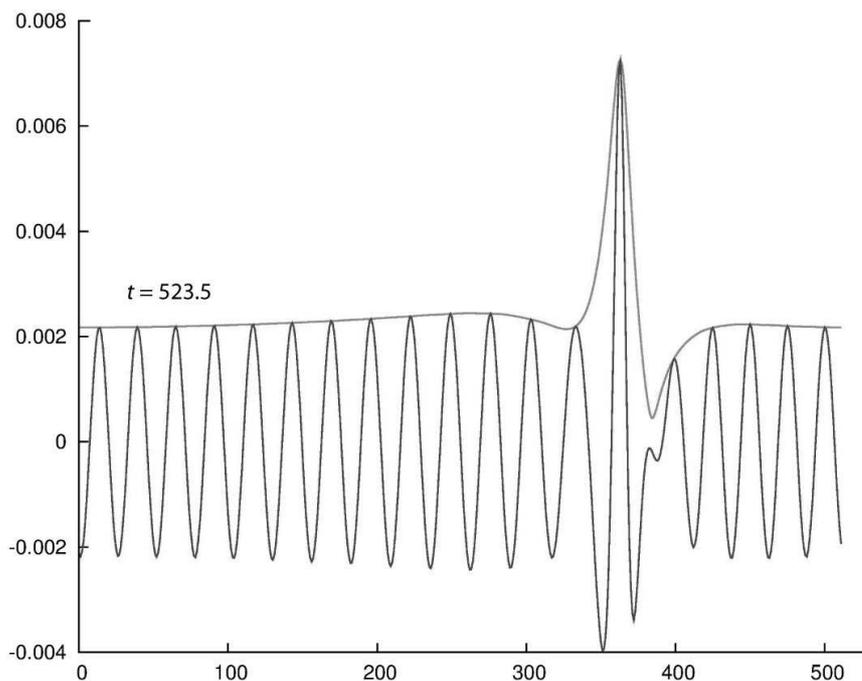


Рис. 10. Образование волны-убийцы:  $|b(x)|$  и  $\text{Re}(b(x))$ .

Работа выполнена при поддержке грантом Миннауки РФ № 11.G34.31.0035, а также The US Army Corps of Engineers Grant W912-BU-08-P-0143, ONR Grant N00014-06-C-0130, NSF Grant DMS 0404577, Grant NOPP «TSA-a two scale approximation for wind-generated ocean surface waves», грантами РФФИ 09-01-00631 и 09-05-13605, грантами «Фундаментальные проблемы в нелинейной динамике» Президиума РАН и «Ведущие научные школы РФ».

### Литература

1. Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1968. V.2. P.190–194.
2. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского гос. технического университета, 2004. 158 с.
3. Liu P. A chronology off reaque wave en counters // Geofizika. 2007. V.24, N 1. P.57–70.
4. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. Springer–Verlag: Berlin–Heidelberg, 2009. 216 p.
5. Овсянников Л.В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды // Сб. науч. тр. СО АН СССР. Новосибирск: Ин-т гидродинамики. 1973. Вып.15. С.104–125.
6. Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы. 1999. Т.22, № 10. С.916–928.
7. Дьяченко А.И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2001. Т.376, № 1. С.27–29.
8. Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B Fluids. 2002. V.21. P.283–291.
9. Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // J. Comp. Phys. 2005. V.210. P.247–273.
10. Ruban V.P. Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Let. A. 2005. V.340, N 1–4. P.194–200.
11. Шамин Р.В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. 2008. Т.418, № 5. С.603–604.
12. Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // Phys. Let. A. 1996. V.221. P.73–79.

13. *Lighthill M.J.* Contributions to the Theory of Waves in Non-linear Dispersive Systems // J. Appl. Math. 1965. V.1, N 3. P.269–306.
14. *Захаров В.Е.* Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией // ЖЭТФ. 1966. Т.51, № 4. С.1107–1114.
15. *Benjamin T.B., Feir J.E.* The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory // J. Fluid Mech. 1967. V.27. P.417–430.
16. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Prokofiev A.O.* Freak waves: Peculiarities of Numerical Simulations // Extreme Ocean Waves / Eds. E.Pelinovsky, C Harif. Springer, 2008. P.1–30.
17. *Zufiria J.A., Saffman P.G.* The superharmonic instability of finite-amplitude surface waves on water of finite depth // Stud. Appl. Maths. 1986. V.74, N 3. P.259–266.
18. *Meiron D., Orzag S., Israeli M.* Applications of numerical conformal mapping // J. Com. Phys. 1981. V.40, N 2. P.345–360.
19. *Dyachenko A.I., V.E.Zakharov V.E.* Is the free-surface hydrodynamics an integrablesystem? // Phys. Let. A. 1994. V.190. P.144–148.
20. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // JETP Let. 2008. V.88, N 5. P.307–311.
21. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I.* About Shape of Giant Breather // European Journal of Mechanics, B/Fluids. 2010. V.29, N 2. P.127–131.
22. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* Compact equation for gravity waves on deep water // JETP Let. 2011. V.93, N 12. P.701–705.
23. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* On dynamical equation for water waves in one horizontal dimension // European J. of Mechanics, B/Fluids. 2011. Accepted Manuscript, Available online 7 September, 2011.
24. *Krasitskii V.P.* Canonical transformation in a theory of weakly nonlinear waves with a nondecay dispersion law // Sov. Phys. JETP. 1990. V.71. P.921–927.
25. *Zakharov V.E., Lvov V.S., Falkovich G.* Kolmogorov Spectra of Turbulence I, Springer–Verlag. 1992. 263 p.

Статья поступила в редакцию 10.09.2011 г.

