

УДК 532.59

© Д.Г.Архипов<sup>1,2</sup>, Г.А.Хабахнашев<sup>1,2</sup>, 2013<sup>1</sup>Институт теплофизики им. С.С.Кутателадзе СО РАН, Новосибирск<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет  
theory@itp.nsc.ru

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛОСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ОКЕАНЕ СО СКАЧКОМ ПЛОТНОСТИ И ПОЛОГИМ ДНОМ

Получено новое уравнение для описания трансформации двухмерных возмущений пикноклина над недеформируемым дном в приближении «твердой крышки». Предполагается, что длины волн умеренно большие, их амплитуды малы, но конечны, а дно может быть слабонаклонным. Выведенное уравнение применимо для описания взаимодействия возмущений, которые одновременно распространяются в противоположных направлениях. Аналитически решена задача о встречном столкновении двух уединенных волн. Численно найдены решения ряда характерных задач и продемонстрировано влияние топографии дна на эволюцию возмущений.

**Ключевые слова:** динамика, длинные возмущения, пикноклин, распространение, трансформация, эволюция.

Вопросы о внутренних волнах занимают значительное место в понимании динамики океанов [1–3]. Для правильного описания гравитационных возмущений в естественных водоемах, содержащих пикноклин, конечно же, следовало бы задавать реальную зависимость плотности воды от глубины. Но наиболее простой моделью, учитывающей стратификацию, является профиль в виде одной ступеньки. Хотя в двухслойной жидкости возможны только две моды колебаний (баротропная и первая бароклинная), это ограничение не так серьезно. Результаты наблюдений (например [2–4]), показывают, что во многих ситуациях большая часть энергии приходится именно на первые две моды колебаний.

Вопрос о распространении плоских возмущений малой, но конечной амплитуды в системе, состоящей из двух неглубоких жидкостей близкой плотности со свободной верхней поверхностью и неподвижным горизонтальным дном, впервые был поставлен в работе [5]. Допущение о том, что скачок плотности на границе раздела слоев много меньше абсолютных значений плотностей, позволяет воспользоваться приближением «твердой крышки» (см. также приложение в статье [6]). Дальнейшее развитие данной проблемы достаточно подробно рассмотрено в монографиях [7–9].

К настоящему времени для умеренно длинных слабонелинейных плоских волн на границе раздела несмешивающихся сред различной плотности были получены модельные уравнения типа уравнения Кортевега – де Вриза [10], расширенного уравнения Кортевега – де Вриза [11], модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза [12] и модифицированного уравнения Буссинеска [13]. Эти уравнения удобны для анализа, но при их выводе предполагалось, что нелинейные волны бегут преимущественно в одном направлении. Лишь в таких ситуациях можно выразить скорости жидкостей, входящие в конвективные члены уравнений движения, через возмущения границы раздела и свести задачу к одному уравнению для скалярной величины.

В противном случае для описания умеренно длинных волн конечной амплитуды, одновременно распространяющихся навстречу друг другу, необходимо использовать системы уравнений, которые содержат как возмущения границы раздела, так и скорости

сред. Однако до недавнего времени в указанных системах (например, [14–16]) даже линейные члены всех уравнений включали слагаемые, зависящие от скоростей жидкостей. Только в [17] была предложена комбинированная система, которая обладает основными достоинствами упомянутых выше подходов, но при этом свободна от их недостатков.

Целью данной статьи является вывод одного оригинального уравнения в частных производных для моделирования эволюции нелинейных плоских внутренних волн, с помощью которого можно исследовать задачи о встречном столкновении возмущений (для однородной среды со свободной поверхностью это было сделано в [18]). Кроме того, будет продемонстрирована пригодность нового уравнения к описанию ряда гидрофизических задач.

**Допущения и получение модельного уравнения.** Будем использовать те же предположения, что и в [17]: 1) пренебрегаем сжимаемостью воды (так как скорость распространения внутренних гравитационных волн в океанах много меньше скорости звука), а также капиллярными и диссипативными процессами (т.е. поверхностным натяжением и вязкостью воды); 2) стационарные компоненты течений равны нулю; 3) «длина волны»  $\lambda$  существенно больше, а амплитуда возмущения пикноклина  $\eta_a$  значительно меньше равновесных глубин слоев  $h_l$  ( $h_l/\lambda \sim \varepsilon^{1/2}$  и  $\eta_a/h_l \sim \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр, а индекс  $l$  равен единице для параметров верхнего слоя и двойке для нижнего); 4) горизонтальная «крышка» и слабонаклонное дно ( $|\nabla h_2| \sim \varepsilon^{1/2}$ ) неподвижны и недеформируемы (рис.1); 5) скачок плотности в пикноклине много меньше абсолютного значения плотности воды ( $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 \ll \rho_1$ ); 6) возникающие течения потенциальны внутри каждого слоя. Тогда комбинированная система уравнений [17] для пространственных возмущений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \eta - C_N \nabla^2 \eta^2 - \frac{h_1 h_2}{H} \nabla^2 (\mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_1^2) - C_D \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = C_B \nabla h_2 \cdot \nabla \eta, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_l = \nabla \phi_l, \quad \nabla^2 \phi_l = (-1)^{l+1} (\partial \eta / \partial t) / h_l. \quad (2)$$

Здесь  $t$  – время,  $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y)$ , коэффициенты при всех членах основного уравнения (1) зависят только от геометрических ( $h_1, h_2$ ) и физических ( $g, \rho_1, \rho_2$ ) параметров задачи:  $c^2 = g h_1 h_2 \Delta\rho / \rho_1 H$ ,  $C_N = c^2 (h_1 - h_2) / (2h_1 h_2)$ ,  $C_D = h_1 h_2 / 3$  и  $C_B = c^2 h_1 / (h_2 H)$ ;  $g$  – ускорение свободного падения,  $H = h_1 + h_2$ . Четыре простых вспомогательных линейных уравнения (2) необходимы для нахождения усредненных горизонтальных компонент скоростей воды  $\mathbf{u}_l$ , входящих лишь в квадратичные члены (т.е. члены второго порядка малости) уравнения (1).

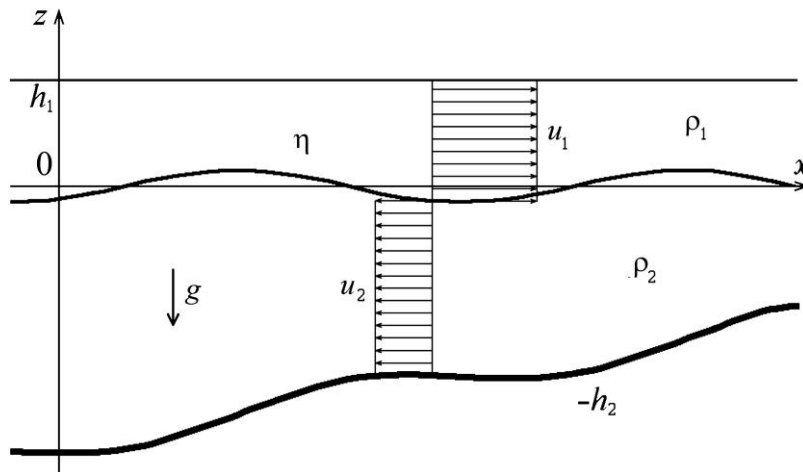


Рис.1. Волны на границе раздела и скорости течения в неглубокой двухслойной воде между неподвижными недеформируемыми пологим дном и горизонтальной крышкой.

Как было сказано выше, целью данной работы является моделирование плоских волн. Тогда в исследуемом случае ( $h_1 = \text{const}$  и  $h_2 = h_{20}f(x)$ , где  $f(x) \sim \varepsilon^{1/2}$ ) имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_2}{H} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_2}{h_1 + h_2} \right) = \frac{(h_1 + h_2)(\partial h_2 / \partial x) - h_2(\partial h_2 / \partial x)}{(h_1 + h_2)^2} = \frac{h_1}{H^2} \frac{\partial h_2}{\partial x}.$$

Следовательно, правую часть уравнения (1) можно записать в виде  $c^2(H/h_2) \partial(h_2/H)/\partial x \partial\eta/\partial x$  и объединить со вторым членом в левой части этого уравнения, так как

$$\frac{H}{h_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_2}{H} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{h_1}{h_2 H} \frac{\partial h_2}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Кроме того, величина  $c^2 H/h_2 = g h_1 \Delta \rho / \rho_1$ , т.е. не зависит от координаты  $x$ . В результате запишем основное волновое уравнение (1) в более компактной форме:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \Delta \rho g \frac{h_1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_2}{H} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - C_N \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} - \frac{h_1 h_2}{H} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_1^2) - C_D \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Зависимости коэффициентов  $c^2$  и  $C_N$  от глубины нижнего слоя  $h_2$  проиллюстрированы на рис.2. Хорошо видно, что коэффициент  $C_N$  меняет свой знак при  $h_2 \approx h_1$ .

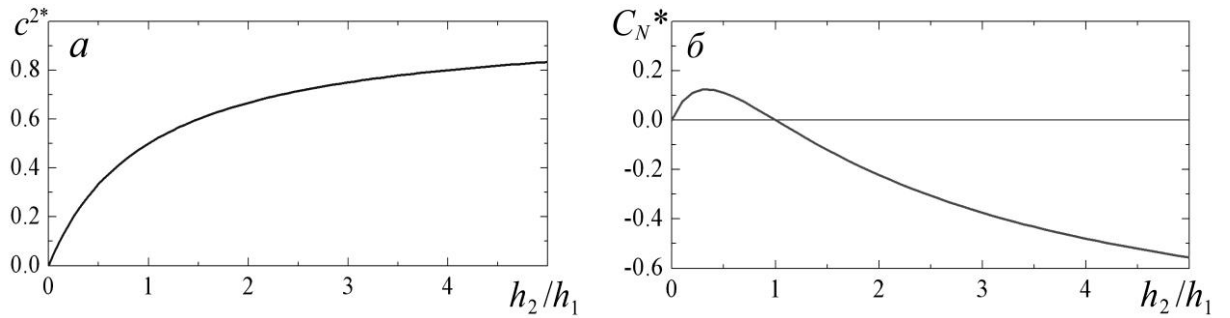


Рис.2. Зависимости безразмерного квадрата фазовой скорости очень длинных линейных волн.  $c^{2*} = c^2 \rho_1 / (g h_1 \Delta \rho)$  (а) и безразмерного коэффициента при нелинейном члене в уравнениях (1) и (3)  $C_N^* = C_N \rho_1 / (g \Delta \rho)$  (б) от безразмерной глубины нижнего слоя.

Наконец, отметим, что, согласно закону сохранения массы, в любом вертикальном сечении  $h_1 \mathbf{u}_1 + h_2 \mathbf{u}_2 \approx 0$  (в первом приближении). Поэтому знак второго нелинейного члена уравнений (1) и (3), содержащего квадраты скоростей воды в слоях, также меняется при  $h_2 \approx h_1$ .

Рассмотрим трансформацию нелинейных плоских волн и введем вспомогательную функцию  $\psi$  с помощью равенств  $\partial\psi/\partial x = \eta$  и  $\partial\psi/\partial t = -u_l[\eta + (-1)^l h_l]$ . При этом точные законы сохранения массы в слоях выполняются тождественно (равенство вторых смешанных производных функции  $\psi$ ), а в члене второго порядка малости уравнения (3), содержащем  $u_l^2$ , можно заменить  $u_l$  на  $(-1)^{l+1} (\partial\psi/\partial t)/h_l$ . Подставив эти зависимости в уравнение (3), имеем

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial x} - \Delta \rho g \frac{h_1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_2}{H} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - C_N \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{h_1 h_2}{H} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] - C_D \frac{\partial^5 \psi}{\partial t^2 \partial x^3} = 0.$$

Если ограничиться случаем локализованных возмущений пикноклина ( $\eta \rightarrow 0$ ,  $\partial\psi/\partial x \rightarrow 0$ ,  $\partial\psi/\partial t \rightarrow 0$  и т.д. при  $x \rightarrow \infty$ ), одновременно распространяющихся как в направлении роста горизонтальной координаты  $x$ , так и в противоположную сторону, то

можно проинтегрировать получившееся уравнение по координате от  $x$  до  $\infty$ . В итоге система модельных уравнений (1) и (2) сводится к следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \rho g \frac{h_1 h_2}{\rho_1 H} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \Delta \rho \frac{g h_1 h_2}{2 \rho_1 H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{h_1 h_2}{3} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Это и есть новое модельное уравнение в частных производных для описания эволюции нелинейных плоских локализованных возмущений пикноклина океана.

**Приближенные аналитические решения модельного уравнения.** Наиболее интересным применением уравнения (4) является исследование встречного столкновения двух уединенных волн. Благодаря тому что время такого взаимодействия достаточно мало, можно воспользоваться теорией возмущений. Для этого введем новые переменные  $\xi_1 = x - ct$  и  $\xi_2 = x + ct$ . Тогда  $\partial/\partial t = c(\partial/\partial \xi_1 - \partial/\partial \xi_2)$ ,  $\partial/\partial x = \partial/\partial \xi_1 + \partial/\partial \xi_2$  и уравнение (4) запишем в виде

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = -\frac{h_1 h_2}{3} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right)^2 \psi - \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \times \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right)^2 - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (5)$$

Будем искать решения данного уравнения в следующей простой форме:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi_1(\xi_1, \varepsilon \xi_2) + \psi_2(\varepsilon \xi_1, \xi_2) + \varepsilon \psi'(\xi_1, \xi_2),$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – решения уравнения (5), причем  $\partial \psi_1 / \partial \xi_2 \sim \varepsilon \partial \psi_1 / \partial \xi_1$  и  $\partial \psi_2 / \partial \xi_1 \sim \varepsilon \partial \psi_2 / \partial \xi_2$ . Тогда в членах второго порядка малости  $\psi_1 \approx \psi_1(\xi_1)$  и  $\psi_2 \approx \psi_2(\xi_2)$ , а после подстановки этого разложения в уравнение (5) ряд членов высоких порядков малости может быть опущен. Кроме того, благодаря тому что  $\psi_1$  и  $\psi_2$  являются решениями уравнения (5), имеем два равенства:

$$-4 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{3 h_1 - h_2}{2 h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} \right)^2 \right] \right\} - \frac{h_1 h_2}{3} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \xi_1^4} = 0,$$

$$-4 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{3 h_1 - h_2}{2 h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] \right\} - \frac{h_1 h_2}{3} \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \xi_2^4} = 0.$$

В итоге получаем следующее дифференциальное уравнение для поправки:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{h_1 - h_2}{4 h_1 h_2} \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} \right).$$

После интегрирования данного уравнения по обоим переменным найдем поправку

$$\psi' = \frac{h_1 - h_2}{4 h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} [\psi_2(\xi_2) - \psi_2(-\infty)] + \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} [\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\infty)] \right\}.$$

Очевидно, что  $\eta(\xi_1, \xi_2) = \eta_1(\xi_1, \varepsilon \xi_2) + \eta_2(\varepsilon \xi_1, \xi_2) + \varepsilon \eta'(\xi_1, \xi_2)$ , а потому  $\eta' = \partial \psi' / \partial x = \partial \psi' / \partial \xi_1 + \partial \psi' / \partial \xi_2$ .

Если дно горизонтально, то у системы уравнений (1) и (2) есть солитонные решения

$$\eta_i = \eta_{0i} \operatorname{sech}^2 [(x - x_0 - U_i t) / L_i],$$

где  $U_i = \pm c \sqrt{(1 + \eta_{0i}^*) / (1 - 2\eta_{0i}^*)}$  – скорость солитона,  $L_i = 2\sqrt{C_D(1 + 1/\eta_{0i}^*)/3}$  – его ширина (характерный размер по координате  $x$ ), а  $\eta_{0i}^* = 2\eta_{0i} C_N / (3c^2)$ . Соответствующее решение уравнения (4) имеет вид  $\psi_i = \eta_{0i} L_i \text{th}[(x - x_0 - U_i t)/L_i]$  (здесь индекс  $i$  также равен 1 или 2 в зависимости от направления распространения локализованного возмущения). В этом случае данный подход приводит к следующему выражению для искомой поправки:

$$\psi'(\xi_1, \xi_2) = \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2} \frac{U_1 U_2 - c^2 / 2}{U_1 U_2 + c^2} \left( [\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\infty)] \frac{d\psi_2}{d\xi_2} + [\psi_2(\xi_2) - \psi_2(-\infty)] \frac{d\psi_1}{d\xi_1} \right),$$

где новые независимые переменные записываются в форме  $\xi_1 = x - U_1 t$  и  $\xi_2 = x + U_2 t$ .

Как отмечалось в [17], для слабонелинейных волн, бегущих в одном направлении, в нелинейном слагаемом (член второго порядка малости) уравнения (1) можно заменить  $u_i^2$  на  $c^2 \eta^2 / h_i^2$ . Тогда легко перейти к модифицированному уравнению Буссинеска [19]:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \eta - 3C_N \nabla^2 \eta^2 - C_D \frac{\partial^2 \nabla^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

которое имеет солитонные решения, отличающиеся лишь видом формул для характеристик:

$$\eta_{Bi} = \eta_{0Bi} \text{sech}^2 [(x - x_0 - U_{Bi} t)/L_{Bi}], \quad U_{Bi} = \pm c \sqrt{1 + \eta_{0i}^*}, \quad L_{Bi} = 2\sqrt{C_D(1 + 1/\eta_{0i}^*)}.$$

Формально (с математической точки зрения) модифицированное уравнение Буссинеска позволяет решать задачу о встречном столкновении возмущений. Если поправку к солитонным решениям искать аналогично тому, как это сделано выше, то получаем формулу

$$\eta'(\xi_1, \xi_2) = -\frac{6C_N}{U_{B1} U_{B2} + c^2} \eta_1(\xi_1) \eta_2(\xi_2).$$

Здесь новые независимые переменные имеют немного другой вид:  $\xi_1 = x - U_{B1} t$  и  $\xi_2 = x + U_{B2} t$ .

**Численные решения модельного уравнения.** Заметим, что лишь нелинейные члены в новом уравнении (4) отличаются от соответствующих в модифицированном уравнении Буссинеска (6). Поэтому расчеты выполнены с помощью модификации неявной трехслойной конечно-разностной схемы, описанной в статье [20]. В частности, на шаге «предиктор» определение первых производных по времени осуществлялось по двум предыдущим слоям – второму и первому, а на шаге «корректор» – третьему и первому.

Для верификации алгоритма и программы расчетов по новому уравнению использовались не только исследование устойчивости солитонных решений, но и задачи о взаимодействии уединенных волн над горизонтальным дном. В этих случаях задание начальных данных (первые два временных слоя) проведено с помощью аналитических решений. Вычисления показали, что скорости и формы солитонов сохранялись по мере распространения с высокой точностью.

На рис.3 показано встречное столкновение двух одиночных волн различной амплитуды ( $\eta_{10} = 0.10 h_{20}$  и  $\eta_{20} = 0.18 h_{20}$ , где  $h_{20}$  – глубина нижнего слоя при  $x = 0$ ) над подводным хребтом (слева) и над подводным плато (справа). В первом случае после взаимодействия за основными возмущениями возникают осциллирующие «хвосты» (значительно заметнее для волны большей амплитуды); во втором случае у волны большей амплитуды существенные колебания на заднем фронте возмущения успевают образоваться еще до момента столкновения (здесь в начальный момент времени оси солитонов располагались в точках  $x_{01} = -120$  и  $x_{02} = 120$ ). Указанные значения отношений плотностей (пресная и соленая во-

да) и глубин слоев соответствуют реальным значениям параметров, при которых были выполнены лабораторные эксперименты [21] по динамике одиночных возмущений над горизонтальным дном или над треугольным препятствием на дне.

На рис.4 продемонстрированы результаты расчетов для волн одинаковой амплитуды ( $\eta_{10} = \eta_{20} = 0.14h_{20}$ ) также над подводным хребтом (слева) и над подводным плато (справа). В первом случае картина качественно не отличается от рассмотренной выше ситуации. А во втором случае к моменту столкновения возмущений осцилляции на задних фронтах наблюдаются, конечно же, у обеих волн. Поэтому при  $x=0$  уровень пикноклина вначале понижается, а затем повышается на достаточно большую величину. Таким образом, в этой ситуации амплитуда колебаний пикноклина оказывается наибольшей (обратим внимание на то, что горизонтальный масштаб на правом рис.4 отличаются от масштабов рис.3).

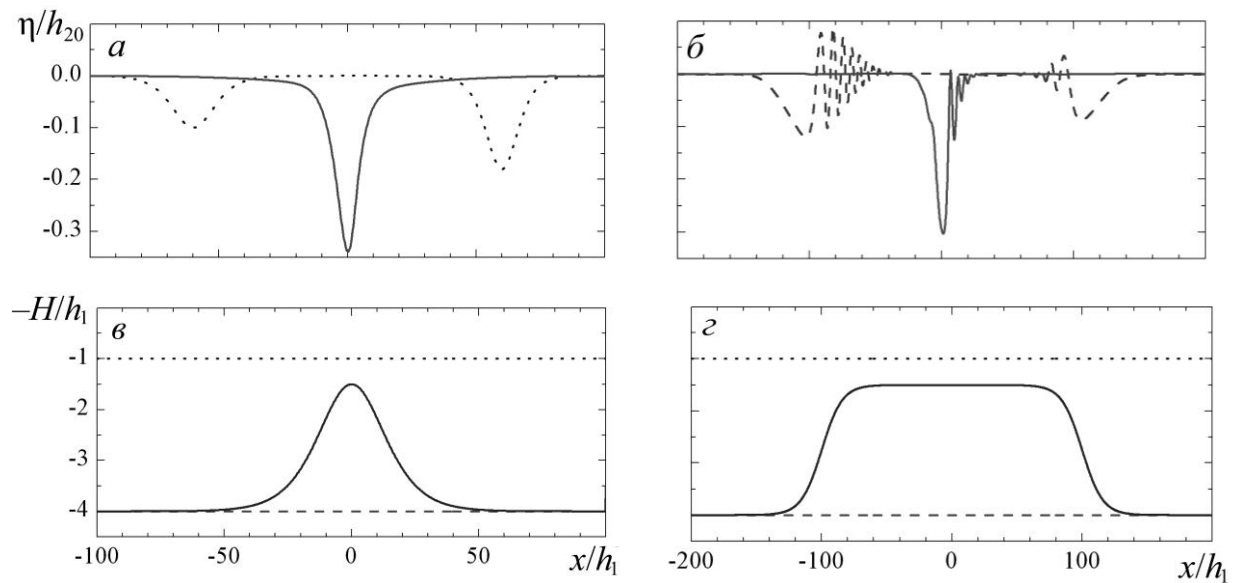


Рис.3. Встречное столкновение двух одиночных волн различной амплитуды.

*a, б* – профили уединенных возмущений пикноклина в разные моменты времени: пунктирная линия –  $t = 0$ , сплошные –  $t^* = t c_0 / h_1 = 66.6$  (*a*) и 210 (*б*), штриховая –  $t^* = 360$  при  $\rho_2/\rho_1 = 1.02$ ,  $h_{20}/h_1 = 0.5$  и  $h_{2\infty}/h_1 = 3$ ; *в, з* – профили дна (сплошная и штриховая линии) и уровень невозмущенного пикноклина (пунктирная линия).

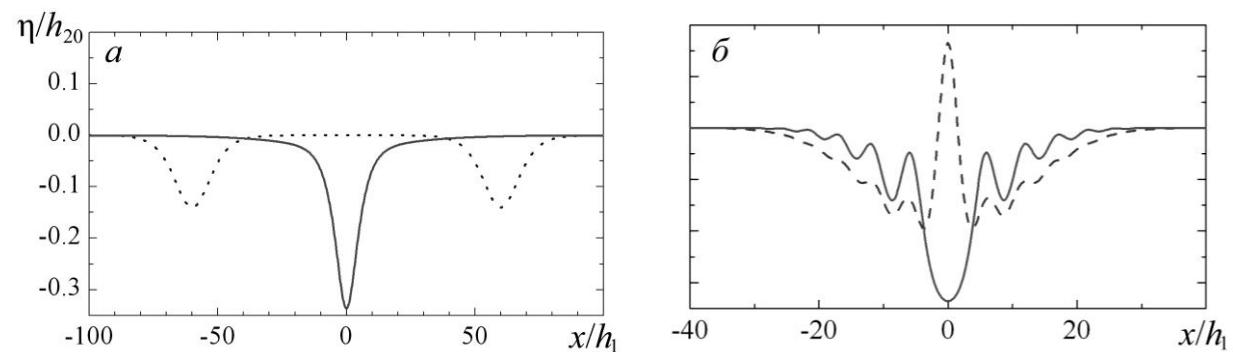


Рис.4. Встречное столкновение двух волн одинаковой амплитуды.

Профили уединенных возмущений пикноклина в разные моменты времени: пунктирная линия –  $t = 0$ , сплошные линии –  $t^* = t c_0 / h_1 = 65.4$  (*a*) и 214 (*б*), штриховая линия –  $t^* = 223$  при  $\rho_2/\rho_1 = 1.02$ ,  $h_{20}/h_1 = 0.5$  и  $h_{2\infty}/h_1 = 3$ .

В работе [17] получена зависимость давления в слоях от вертикальной координаты  $z$ :

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_p}{\rho_l} + g(\eta - z) - z \left( 1 + (-1)^l \frac{z}{2h_l} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$

где  $p_p$  – давление на уровне пикноклина. Эта величина легко находится, если воспользоваться динамическим граничным условием на свободной поверхности ( $p_1 = 0$  при  $z = h_1$ ):

$$\frac{p_p}{\rho_l} = g(h_1 - \eta) - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}.$$

Тогда приходим к следующей формуле для давления на дне ( $p_2 = p_b$  при  $z = -h_2$ ):

$$p_b = g(\rho_1 h_1 + \rho_2 \eta) + \Delta \rho g \eta + \rho_1 \frac{H}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}.$$

Очевидно, что для низкочастотных возмущений в неглубоком океане последним слагаемым в данной формуле можно пренебречь, т.е. будет справедлива гидростатика. Однако если океан не слишком мелкий, а волны не очень длинные, то учет инерционных эффектов будет необходим.

На рис.5 показаны мареграммы пикноклина для случая столкновения двух одиночных возмущений различной амплитуды над подводным плато (параметры те же, что и на рис.3). Здесь график на рис.5, *a* соответствует координате, в которой встречаются эти волны, а на рис.5, *б* – за пределами подводного плато. Хорошо видно, что возмущение пикноклина может быть удовлетворительно вычислено из показаний датчика давления на дне по гидростатической зависимости, если глубина океана мала. В противном случае (вне подводного плато) такой расчет существенно занижает амплитуды наблюдаемых осцилляций.

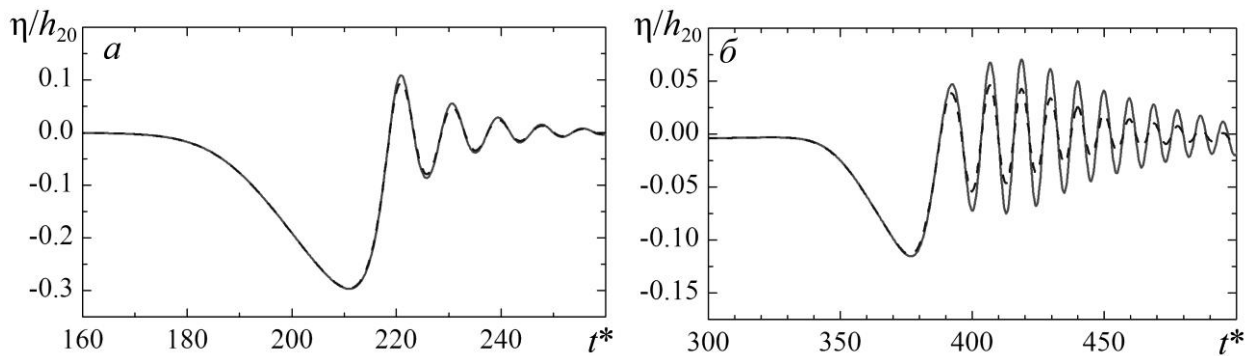


Рис.5. Зависимости возмущений пикноклина от безразмерного времени в двух различных точках.

$a - x/h_1 = 0$ ,  $b - x/h_1 = -120$  при  $\rho_2/\rho_1 = 1.02$ ,  $h_{20}/h_1 = 0.5$  и  $h_{2\infty}/h_1 = 3$ ; сплошные линии – непосредственный расчет по уравнению (4), штриховые – расчет по значениям давления на дне с помощью только гидростатической формулы.

\*\*\*

Сравним результаты, полученные в данной работе для волн первой бароклинной моды, с результатами для возмущений баротропной моды. В случае поверхностных волн коэффициент при нелинейном члене в уравнении, аналогичном уравнению (4), всегда положителен. Поэтому даже при значительном уменьшении глубины океана солитонные решения трансформируются не в возмущение треугольной формы с осциллирующим «хвостом», а в цепочку уединенных волн спадающей амплитуды (возмущения свобод-

ной поверхности остаются только положительными). Из-за отсутствия высокочастотных колебаний амплитуды волн над подводными плато и над хребтом той же высоты не будут сильно отличаться. Кроме того, по этой же причине расчет возмущения свободной поверхности с помощью показаний датчика давления на дне неглубокого океана по гидростатической зависимости будет хорошо согласовываться с наблюдаемыми волнами. Таким образом, наиболее интересные из рассмотренных в данной статье эффектов являются следствием именно учета стратификации океана (хотя и простейшей). Подчеркнем, что в новом модельном уравнении (4) нет производных по координате от глубины океана. Влияние наклона дна на трансформацию внутренних волн осуществляется через изменение коэффициентов этого уравнения.

Как отмечалось в статье [17], для сравнения результатов расчетов по новому уравнению с опытными данными, которые могут быть измерены в лабораторных установках с двумя различными жидкостями, вероятно, понадобится учет капиллярных эффектов. Тогда коэффициент при дисперсионном члене должен быть следующим:  $C_D = h_1 h_2 (1/3 - 1/Bo)$ , где модифицированное число Бонда  $Bo = \Delta \rho g h_1 h_2 / \sigma$ , а  $\sigma$  – поверхностное натяжение.

Аналогично для сопоставления результатов вычислений по новому уравнению с экспериментальными данными, которые могут быть измерены в лабораторных установках небольших размеров, вероятно, понадобится также учет вязкости воды и соответственно нестационарного трения о дно. Последнее может быть осуществлено подобно тому, как это сделано в работе [22]. Следовательно, станет возможным исследовать влияние диссипации, в частности процессы затухания и торможения волн.

Наконец, заметим, что использование приближения «твердой крышки» не является принципиальным. Данный подход может быть применен и в случае, когда верхняя поверхность воды является свободной, также аналогично тому, как это приведено в статье [22] для слабонелинейных возмущений пикноклина, движущихся преимущественно в одном, хотя и произвольном, направлении.

Кратко сформулируем основные результаты данной работы. С помощью введения специальной вспомогательной функции задача о взаимодействии умеренно длинных слабонелинейных плоских локализованных внутренних волн сведена к одному уравнению в частных производных. Использование теории возмущений позволило аналитически определить поправки к солитонным решениям при их лобовом столкновении. Выполнен ряд численных экспериментов по эволюции волн над подводными хребтом и плато. В частности, продемонстрировано, что амплитуда колебаний пикноклина над подводным плато может быть значительно выше, чем над подводным хребтом той же высоты, а для достаточно высокочастотных колебаний в более глубоких частях океана расчет возмущения пикноклина с помощью показаний датчика давления на дне по гидростатической зависимости существенно занижает амплитуды наблюдаемых осцилляций.

Авторы выражают искреннюю признательность Е.Н.Пелиновскому за полезное обсуждение ряда вопросов и рецензенту за замечания, позволившие существенно улучшить текст статьи.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (В.Е.Захаров – НГУ).*

## Литература

1. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. М.: Гидрометеиздат, 1980.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981.
3. Морозов Е.Г. Океанические внутренние волны. М.: Наука, 1985.
4. Сабинин К.Д., Серебряный А.Н., Назаров А.А. Интенсивные внутренние волны в Мировом океане // Океанология. 2004. Т.44, № 6. С.805–810.
5. Keulegan G.H. Characteristics of internal solitary waves // J. Res. Nat. Bureau Standards. 1953. V.51, N 3. P.133–140.



6. Хабахнашев Г.А. Распространение внутренних и поверхностных двумерных нелинейных волн в океане со скачком плотности и пологим дном // Изв. РАН. Физ. атм. океана. 2001. Т.37, № 3. С.397–406.
7. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1981.
8. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
9. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003.
10. Djordjevic V.D., Redekopp L.G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography // J. Phys. Oceanogr. 1978. V.8, N 6. P.1016–1024.
11. Koop C.G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1981. V.112. P.225–251.
12. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. The modified Korteweg-de Vries equation in the theory of large-amplitude internal waves // Nonlinear Processes in Geophysics. 1997. V.4, N 4. P.237–250.
13. Хабахнашев Г.А. Эволюция возмущений границы раздела двух слоев вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. 1990. № 6. С.118–123.
14. Мальцева Ж.Л. Нестационарные длинные волны в двухслойной жидкости // Динамика сплошной среды. 1989. Вып.93–94. С.96–110.
15. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1999. V.396. P.1–36.
16. Helfrich K.R., Melville W.K. Long nonlinear internal waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 2006. V.38. P.395–425.
17. Архипов Д.Г., Сафарова Н.С., Хабахнашев Г.А. Моделирование нелинейных пространственных внутренних волн в морях и океанах со скачком плотности и пологим дном // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. СПб.: Наука, 2009. Т.2, № 2. С.67–76.
18. Архипов Д.Г., Хабахнашев Г.А. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т.93, № 8. С.469–472.
19. Хабахнашев Г.А. Трансформация длинных нелинейных волн в двухслойной вязкой жидкости между пологими дном и крышкой // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т.46, № 6. С.45–57.
20. Литвиненко А.А., Хабахнашев Г.А. Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // Вычислительные технологии. 1999. Т.4, № 3. С.95–105.
21. Wessels F., Hutter K. Interaction of internal waves with a topographic sill in a two-layered fluid // J. Phys. Oceanogr. 1996. V.26, N 1. P.5–20.
22. Хабахнашев Г.А. Динамика длинных пространственных нелинейных волн в океане со скачком плотности и слабонаклонным дном // Океанология. 2008. Т.48, № 4. С.501–509.

Статья поступила в редакцию 01.11.2012 г.

