

УДК 551.466.88

© К.А.Горшков, И.А.Соустова, А.В.Ермошкин, Н.В.Зайцева, 2013  
Институт прикладной физики РАН, Н.Новгород  
soustova@hydro.appl.sci-nnov.ru

## О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПИСАНИИ НЕКВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ СОЛИТОНОВ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, БЛИЗКИХ К ПРЕДЕЛЬНЫМ, В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В рамках уравнения Гарднера с переменными коэффициентами изучается неквазистационарная динамика составных солитонов внутренних волн, близких к предельным. Такая и подобная ей ситуации реализуются при распространении внутренних волн в шельфовой области океанов и морей. Полученные в ходе приближенного теоретического анализа результаты могут быть использованы при анализе и интерпретации натурных данных по наблюдению уединенных внутренних волн.

**Ключевые слова:** интенсивные внутренние волны, шельф Японского и Охотского морей, приближенное аналитическое описание, составные солитоны.

Хорошо известно, что интенсивные внутренние волны (ВВ) играют важную роль в процессе глобального перемешивания вод Мирового океана. Поэтому их диагностика является актуальной проблемой современной океанологии.

Определенным вкладом при решении этой задачи может стать качественное представление об особенностях поведения ВВ в исследуемом районе. Так, в настоящее время можно считать установленным, что в прибрежной зоне океана часто наблюдается интенсификация ВВ по мере приближения к береговой линии [1–3]. Внутренние волны при этом представляют собой группу импульсов, похожую на стационарные уединенные волны-солитоны [1–5], особенности эволюции которых во многом определяются гидрографией района. Так, в работе [3] по наблюдению ВВ в шельфовой зоне Японского моря отмечается существование весьма интересного эффекта – смена полярности внутренних волн-солитонов: по мере распространения к берегу волны углубления в термоклине сменяются волнами поднятия. Точка смены полярности (на самом деле, весьма протяженная зона) определяется местоположением на шельфе, где пикноклин равноудален от поверхности и дна так, что, распространяясь к берегу, внутренние волны проходят эту точку.

К настоящему времени установлено, что динамика солитонов ВВ хорошо описывается слабонелинейными эволюционными уравнениями типа КдВ (либо его модификациями) с постоянными коэффициентами [6, 7]. В условиях реального океана, особенно в его прибрежной зоне, параметры стандартных слабонелинейных уравнений не постоянны (в точке переворота, например, обращается в нуль коэффициент квадратичной нелинейности), поэтому квазистационарные (и тем более стационарные) решения не всегда справедливы [6–8]. Распространение уединенных волн в средах с переменными параметрами представляет самостоятельный интерес в теории солитонов [9–11]. Наиболее исследованы к настоящему времени задачи об эволюции солитонов в средах с медленно меняющимися (по сравнению с масштабами уединенных волн) параметрами [7, 8]. Квазистационарность волнового процесса позволяет в этом случае свести описание трансформации поля уединенной волны к существенно более простой задаче – описанию ди-

намики конечного числа независимых параметров солитона, например координаты солитона и его скорости. Последняя задача традиционно решается с помощью одного из вариантов методов теории возмущений для солитонов [10, 11]. Насколько регулярна и универсальна ситуация в квазистационарном случае, когда мал параметр  $\varepsilon$ , равный отношению масштаба солитона ( $\sim \lambda_m^{-1}$ ) к характерному масштабу изменения параметра среды ( $\sim \Lambda^{-1}$ ), настолько же разнообразны и специфичны сценарии эволюции солитонов в ситуациях, когда их масштабы сравнимы или превышают масштабы изменения параметров среды. При этом в зависимости от того, в какую сторону и на сколько нарушается баланс между нелинейностью и дисперсией, обеспечивающий существование солитонов, процесс может стремиться к линейному (линейная волна в среде с дисперсией) или оставаться нелинейным и приводить лишь к искажениям формы солитона (либо сопровождаться рождением дополнительных уединенных волн (см. результаты численных расчетов, например, в [6–9])). Столь существенные различия в характере эволюции солитонов требуют, очевидно, индивидуальных подходов при изучении конкретных случаев, учитывающих как особенности структуры солитонов, так и особенности характера изменения параметров среды. В частности, в работах [8, 9] показано, что в рамках уравнения Гарднера с переменным коэффициентом квазистационарное описание динамики солитонов становится несправедливым по мере приближения амплитуды солитона к предельной, поскольку нарушается предположение о малости параметра  $\varepsilon$  (характерный размер солитона сравним с характерным масштабом изменения параметров среды).

В работе [15] нами был предложен приближенный подход для описания неквазистационарной эволюции солитонов, которые могут трактоваться как составные структуры, образованные более «элементарными» стационарными волнами–кинками (перепады поля противоположной полярности). Наличие сильно различающихся масштабов у таких солитонов (относительно узкие фронты и спады, протяженные, почти плоские, вершины) позволяет рассмотреть ситуации, когда для уединенной волны в целом условия квазистационарности не выполняются, тогда как для перепадов поля они сохраняются. Такие солитоны существуют в рамках различных моделей нелинейных ВВ [6–15], они известны также в нелинейной оптике в случае сред с так называемой конкурирующей нелинейностью. Проведенное сравнение результатов расчета динамики составных солитонов в рамках уравнения Гарднера вида

$$\phi_t + \phi(\alpha_1(x,t) - \alpha_2(x,t)\phi)\phi_x + \beta(x,t)\phi_{xxx} = 0, \quad (1)$$

по приближенной теории с результатами численного моделирования уравнения (1), показали хорошее качественное и количественное соответствие.

В настоящей работе на основе разработанного ранее приближенного подхода для описания неквазистационарной динамики составных солитонов проводится анализ динамики составных солитонов уравнения Гарднера с переменным коэффициентом квадратичной нелинейности, вплоть до того момента, когда этот коэффициент обращается в нуль. Проводится сравнение с данными численного счета, результаты которого изложены в работах [3, 7], а также качественный анализ трансформации составных солитонов ВВ в средах с переменными параметрами. При этом рассматривается случай двухслойной стратификации: изменение параметров квадратичной и кубичной нелинейности, а также параметра дисперсии обусловлено изменением глубины нижнего слоя жидкости.

В работе кратко приводятся основные положения приближенного описания неквазистационарной эволюции солитонов, которые могут трактоваться как составные структуры, образованные более «элементарными» стационарными волнами–кинками. Метод излагается на примере уравнения Гарднера с переменными коэффициентами вида (1). Далее следуют предварительные результаты приближенного описания неквазистацио-

нарной эволюции солитона уравнения Гарднера в случае, когда переменным параметром является коэффициент квадратичной нелинейности. На основе сравнения с результатами численного счета [3, 7], данных о гидрологии для шельфовой области восточного побережья Тихого океана, п-ова Камчатки и о-ва Сахалин, а также результатов экспериментального наблюдения солитонов ВВ в Японском море [3] делается вывод о качественном соответствии основных особенностей трансформации составных солитонов на шельфе, наблюдаемых в ходе эксперимента [3], с результатами приближенного неквазистационарного описания.

**Модернизированный приближенный подход для описания эволюции составных солитонов, близких к предельным, в рамках уравнения Гарднера с переменными коэффициентами.** Исследование процесса неквазистационарной эволюции солитонов проводится в рамках уравнения Гарднера с переменными коэффициентами в виде, приведенном в работе [15]:

$$\Phi_t + \Phi(\alpha(x,t) - \mu(x,t)\Phi)\Phi_x + \beta(x,t)\Phi_{xxx} = 0. \quad (2)$$

Изложим кратко алгоритм решения. Пусть параметры уравнения (2) постоянны. Рассматривается последовательность кинков чередующейся полярности, которые при постоянных параметрах среды  $\alpha, \mu, \beta = \text{const}$  формируют последовательность солитонов, близких к предельным [14]:

$$\phi_s(x,t) = \bar{\phi} + \frac{D}{2} [th\lambda(x - vt + \Delta) - th\lambda(x - vt - \Delta)], \quad (3)$$

где  $\bar{\phi}$  – произвольный постоянный пьедестал,  $D^2 = \frac{6}{\mu}(v - \bar{\phi}(\alpha_1 - \alpha_2\bar{\phi}))$ ,

$4\lambda\Delta = \ln((\phi_m + D)/(\phi_m - D))$ ,  $\phi_m = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 2\bar{\phi}$ ,  $\lambda = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{6\beta}}$ . Амплитуда солитона

( $\max|\phi_s - \bar{\phi}|$ ) и скорость ( $v$ ) связаны соотношением  $\max|\phi_s - \bar{\phi}| = |\phi_m| - \sqrt{|\phi_m|^2 - D^2}$  а их возможные значения лежат в следующих интервалах:

$$0 < \max|\phi_s - \bar{\phi}| < |\phi_m|, \bar{\phi}(\alpha_1 - \alpha_2\bar{\phi}) < v < v_m = \frac{\alpha_1^2}{6\alpha_2} + \frac{\bar{\phi}}{3}(\alpha_1 - \alpha_2\bar{\phi}). \quad (4)$$

При малых амплитудах решение (3) стремится к солитонному решению уравнения КдВ. В другом предельном случае, когда амплитуда и скорость солитона стремятся к максимальным значениям –  $\phi_m, v_m$ , уединенная волна принимает вид плато (рис.1), ограниченного относительно узкими перепадами поля, которые по своей структуре близки к кинкам – другому типу стационарных волн, существующих в рамках уравнения (2), при постоянных  $\alpha_{1,2}, \beta$  и единственном значении скорости  $v = v_m$ :

$$\phi_k(x,t) = \bar{\phi} + \frac{\phi_m}{2} [1 \pm th\lambda_m(x - v_m t)], \lambda_m = \frac{\phi_m}{2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{6\beta}}. \quad (5)$$

Солитоны (3) можно рассматривать как составные образования, сформированные кинками разных полярностей (знаки  $\pm$  в (5))

При наличии возмущений, обусловленных либо воздействием соседних солитонов, либо, как в данном случае, изменением параметров среды, предполагается, что масштабы изменения коэффициентов  $\alpha, \mu, \beta$ , так же как и пьедесталов ( $\sim \Lambda^{-1}$ ), существенно превосходят масштабы перепадов поля кинков ( $\sim \lambda_m^{-1}$ ), но остаются

малыми или сравнимыми с расстояниями и интервалами между ними.

Искомое решение в этом случае строится методом сращиваемых асимптотических разложений, а малый параметр  $\varepsilon$ , по порядку величины, равен отношению масштабов  $\Lambda/\lambda_m \ll 1$ . В каждом приближении решения, полученные в соседних областях, сшиваются между собой (рис.2).

Во внутренних областях для перепадов поля кинков выполняются условия квазистационарности, поэтому в качестве главных членов разложения здесь выступают кинковые решения, параметры которых, определяемые стационарными связями с величинами  $\alpha, \mu, \beta, \phi$ , медленно меняются во времени. Во внешних областях главные члены разложений не имеют фиксированной структуры. Но поскольку величины поля в этих областях меняются медленно и плавно по сравнению с изменениями полей в областях перепадов, их эволюция описывается исходным уравнением Гарднера в бездисперсионном приближении (2), т.е. уравнением простой волны:

$$\Phi_t + \Phi(\alpha(x,t) - \mu(x,t)\Phi)\Phi_x = 0. \quad (6)$$

Процедура сращивания главных членов в разложении решений из внутренних и внешних областей приводит к связи величин медленно меняющихся полей  $\phi_{\pm}(x,t)$  из областей, прилегающих к данному кинку с координатой центра  $x_k(t)$  со стороны  $x > x_k$  и соответственно  $x < x_k$ :

$$\phi_+(x_k, t) = \frac{\alpha(x_k, t)}{\mu(x_k, t)} - \phi_-(x_k, t). \quad (7)$$

Добавляя к этим соотношениям зависимость скорости кинка от параметров  $\mu, \alpha, \phi(x_k, t)$

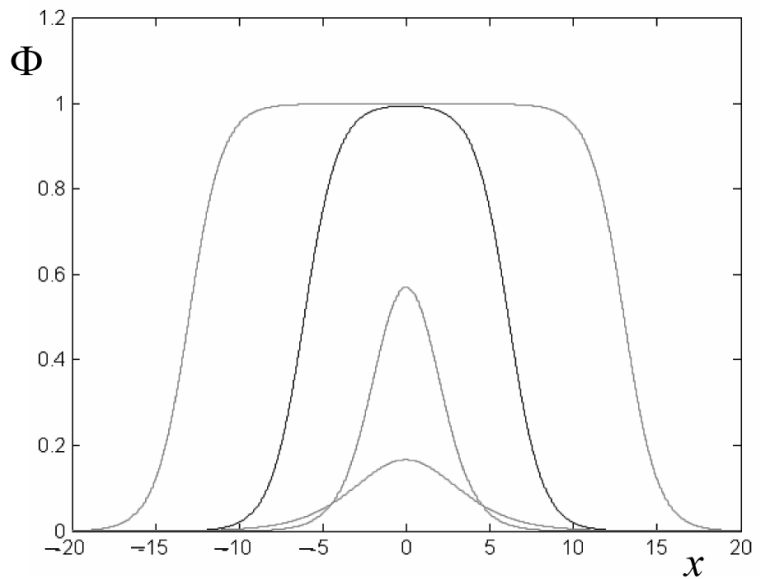


Рис.1. Составные солитоны уравнения (2) с постоянными коэффициентами при нулевом пьедестале для различных значений скорости  $v$ .

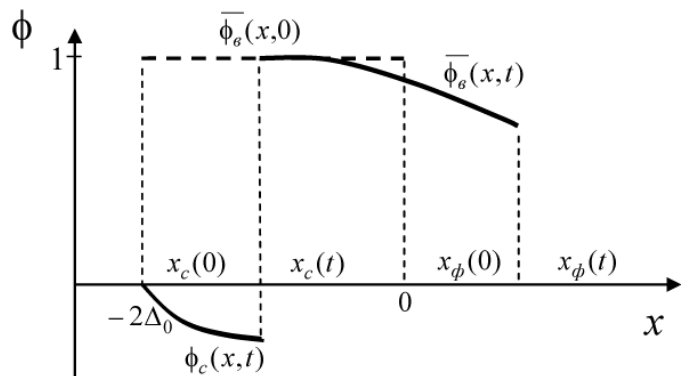


Рис.2. Области резких (внутренних) и плавных (внешних) изменений полей квазисолитона.

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\alpha^2(x_k, t)}{6\mu(x_k, t)} + \frac{\phi(x_k, t)}{3} (\alpha(x_k, t) - \mu(x_k, t)\phi(x_k, t)), \quad (8)$$

получаем вместе с уравнением простой волны (6) замкнутую систему для описания медленно меняющихся полей во всех внешних областях между кинками. Поскольку скорость движения кинка оказывается всегда больше скорости возмущений как в окрестности перед кинком  $x > x_k(t)$ , так и при  $x < x_k$ , кривая  $x_k(t)$  со значениями поля  $\phi_-(x_k, t)$  является линией начальных данных для уравнения простой волны и определяет поле  $\phi(x, t)$  в области между двумя последовательными кинками –  $x_k(t)$  и  $x_{k+1}(t)$ . В результате алгоритм построения общего решения состоит в последовательном определении полей  $\phi(x, t)$  и траекторий кинков  $x_k(t)$ , начиная с области перед первым кинком рассматриваемой последовательности. В рамках предложенного подхода в [15] рассмотрена неквазистационарная эволюция солитона уравнения Гарднера, близкого к предельному, в случае линейного по времени изменения коэффициента кубичной нелинейности  $\mu(t) = \mu_0(1+\varepsilon)$ ,  $\mu_0 = \text{const}$ . В аналитическом виде получены зависимости от времени перепадов поля на фронте и спада квазисолитона, координаты этих перепадов; в параметрической форме представлены пространственно-временные распределения поля на вершине квазисолитона и поля, появляющегося за его спадом.

Об эффективности предложенного подхода можно судить из приведенных в работе [9] распределений поля солитона в различные моменты времени, которые воспроизводятся и здесь (рис.3). Видно, что как в качественном, так и количественном отношении приближенное описание собственно квазисолитона (фронт, вершина, спад) находится в хорошем соответствии с численным расчетом; в то же время плавный и медленный ход эволюции поля, возникающего за спадом квазисолитона, нарушается появлением особенностей (неограниченно укрупняющиеся участки, физически недопустимые неоднородности  $\phi(x, t)$ ).

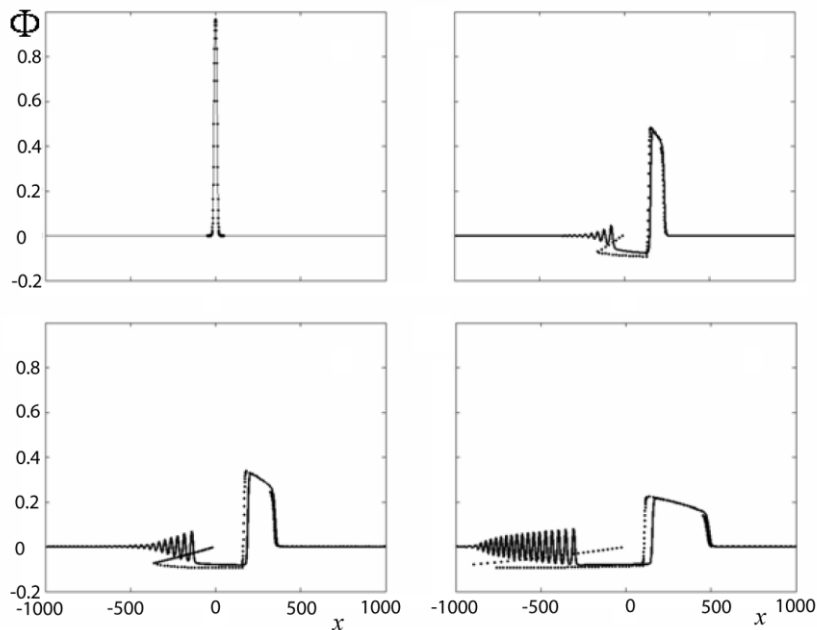


Рис.3. Форма квазисолитона в разные моменты времени при  $\mu(t) = \mu_0(1 + \varepsilon t)$ ,  $\varepsilon = 1/1440$ .

Сплошные кривые – точное решение уравнения Гарднера,  
 точки – приближенный асимптотический подход.

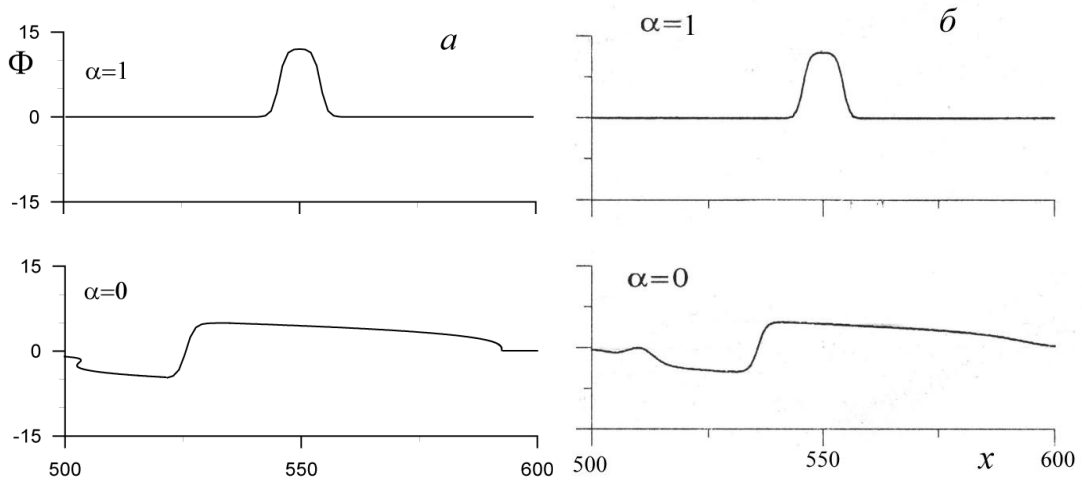


Рис.4. Форма квазисолитона при  $\alpha = 1 + \epsilon t$ .

*a* – приближенный подход, *б* – численный счет уравнения Гарднера [9].

В связи с наблюдаемым на шельфе Японского моря эффектом смены полярности солитона интересно рассмотреть случай переменного коэффициента  $\alpha(\tau)$  при квадратичной нелинейности; численный анализ этой ситуации проводился в работах [5, 7]. В качестве предварительного результата остановимся на случае, когда параметры кубичной нелинейности и дисперсии постоянны ( $\mu_0 = \text{const} = 1$ ), а параметр квадратичной нелинейности  $\alpha$  линейно меняется со временем ( $\alpha = 1 + \epsilon t$ ). Прежде всего отметим, что характеристическая система уравнений простой волны (6) элементарно интегрируется:

$$2\epsilon(x - x_0) = \phi(1 + \epsilon t - \phi)^2 - \phi(1 + \epsilon t_0 - \phi)^2. \quad (9)$$

Все характеристики (9) параболы в плоскости  $(x, t)$  имеют вершины, обращенные вдоль оси  $x$ , и фокальные параметры  $\phi^{-1}\epsilon^{-2}$ . При подстановке траектории кинка  $x_0(t_0)$  и распределения поля  $\phi(t_0)$  вдоль нее выражение (9) описывает медленно меняющееся поле в области за этим кинком ( $x < x_0(t_0)$ ). Так, отсутствие возмущений перед фронтом солитона в начальный момент времени, сохраняющееся, очевидно, и в дальнейшем, позволяет определить скорость  $\alpha^2(t)/6$ , а следовательно, и координату фронта, а также величину перепада поля  $\alpha(t)$  на фронте квазисолитона непосредственно из выражений:

$$x_\phi(t) = 1/6 \int \alpha^2(t) dt = x_\phi(0) + (1 + \epsilon t)^3 - 1/18\epsilon, \quad \phi(x_\phi(t), t) = \alpha(t) = 1 + \epsilon t. \quad (10)$$

Подстановка зависимостей (10) в (9) дает описание эволюции медленно меняющегося поля за фронтом квазисолитона, отвечающего его вершине:

$$2\epsilon(x - x_\phi(0)) = (\phi^3 - 1)/9 + \phi(1 + \epsilon t - \phi)^2. \quad (11)$$

Координаты спада квазисолитона  $x_c(t)$  и поля  $\phi = \phi_c^+(t)$  вблизи него находятся, как и в работе [15], из уравнения (7) и выражения (8) при  $x = x_c(t)$  и  $\phi = \phi_c^+(t)$ . В параметрической форме эти величины имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_c^+(p) &= p\alpha(p) = p(1 + \varepsilon t(p)), \\
 \bar{\phi}_c^-(p) &= -(p-1)\alpha(p) = -(p-1)(1 + \varepsilon t(p)), \\
 1 + \varepsilon t(p) &= c(1-p)^{-1/5} (p^2 - 3/5p + 1/10)^{-2/5} \exp(-2/5 \arctg 1/10 p^{-3}), \\
 2\varepsilon x_c(p) &= p \left[ (p-1)^2 + p^2/9 \right] \left[ 1 + \varepsilon t(p)^3 - 1/9 + 2\varepsilon x_\phi(0) \right]
 \end{aligned} \tag{12}$$

(параметр  $c$  определяется начальной длительностью солитона).

Зависимость  $\bar{\phi}_c^-(t(p)) = \alpha(p) - \bar{\phi}_c^+(p) = (1-p)\alpha(p)$  вместе с  $x_c(p)$  определяют линию начальных данных для нахождения поля  $\phi_c(x, t)$  за спадом квазисолитона из (11), распределение которого может быть представлено в параметрической форме. Сравнение распределений полей, полученных в рамках приближенного подхода и прямого численного интегрирования уравнения Гарднера, приведено на рис.4.

Можно констатировать не только качественное, но и количественное соответствие между ними. Важно подчеркнуть, что приближенный подход дает адекватное описание распределения поля, а в момент, когда  $\alpha = 0$ , и традиционное квазистационарное описание не применимо.

Чтобы использовать полученные нами результаты по приближенному описанию трансформации составных солитонов для анализа эволюции интенсивных ВВ в шельфовой зоне океана, воспользуемся результатами работы [8], где показано, что уравнение Гарднера, описывающее ВВ в двухслойной аппроксимации при переменной глубине нижнего слоя, имеет вид

$$A_t + cA_x + \frac{cQ_x}{2Q}A + \mu_1AA_x + \mu_2A^2A_x + \delta A_{xxx} = 0, \tag{13}$$

где  $A(x, t)$  – амплитуда внутренней волны;  $c(x)$  – линейная скорость длинных волн;  $Q(x)$  – характеризует изменение амплитуды волны за счет изменения скорости  $c(x)$ , обусловленного изменением глубины нижнего слоя;  $\mu, \mu_1, \delta$  – параметры нелинейности и дисперсии соответственно. В приближении двухслойной неподвижной жидкости коэффициенты нелинейности и дисперсии уравнения Гарднера имеют вид (см.напр., [8])

$$c = \sqrt{\frac{g\Delta\rho}{\rho} \frac{h_1h_2}{h_1+h_2}}, \delta = \frac{ch_1h_2}{6}, \mu = \frac{3c}{2} \frac{h_1-h_2}{h_1h_2}, \mu_1 = -\frac{3c}{8h_1^2h_2^2} (h_1^2 + h_2^2 + 6h_1h_2), \tag{14}$$

где  $\Delta\rho/\rho$  – скачок плотности между верхним слоем с толщиной  $h_1$  и нижним слоем с толщиной  $h_2$ . Заменой переменных

$$\phi = \sqrt{Q}A, \tau = \int \frac{dx}{c}, \xi = \tau - t, \alpha = \frac{\mu_1}{c\sqrt{Q}}, \lambda = \frac{\delta}{c^3}, \beta = \frac{\mu_2}{cQ} \phi = \sqrt{Q}A, \tau = \int \frac{dx}{c}$$

уравнение (13) сводится к уравнению вида (2), где соответствующие коэффициенты нелинейности и дисперсии будут функциями переменной  $\tau = \int \frac{dx}{c}$ , являющейся «лучевой» координатой:

$$\phi_t + \phi(\alpha(\tau) - \beta(\tau)\phi)\phi_x + \lambda(\tau)\phi_{xxx} = 0. \tag{15}$$

Выражение для члена  $Q$  в двухслойном приближении получено в работе [8]

$$Q = 2g\Delta\rho c. \quad (16)$$

При использовании приведенных выражений (14)–(16) были рассчитаны коэффициенты уравнения Гарднера в виде (14) для условий эксперимента, результаты которого описаны в [3]. Согласно [3], на шельфе п-ова Камчатка наблюдалась уединенная волна: скорость ее распространения 0.51 м/с, амплитуда солитона 10 м (головная высота 14 м), ширина солитона 500 м (17 мин), линейная скорость распространения  $c = (0.35-0.24)$  м/с, положение термоклина  $h_1 = 14.5$  м; общая глубина менялась линейно с коэффициентом 0.017. Ниже приведены расчет коэффициентов уравнения Гарднера вида (15) и значения амплитуды предельного солитона при данных параметрах гидрологии (рис.5). Видно, что коэффициент квадратичной нелинейности меняет знак при значении оси  $x$ , равном 1 км, коэффициент кубичной нелинейности при этом существенно отличается от нуля. Сравнивая результаты наблюдений [3] с результатами расчета по нашей приближенной модели, а также результатами численного моделирования уравнения Гарднера [8], можно отметить полное качественное совпадение основных особенностей трансформации переднего и заднего фронтов уединенной волны – первоначальное уменьшение амплитуды фронта, согласно (10), и рост амплитуды заднего фронта. При этом для каждой точки шельфовой зоны может быть получено значение амплитуды предельного солитона, определяемого фактически только гидрологией и топографией шельфовой области. Для количественного сравнения и оценки амплитуд фронта и спада необходимо знать параметры начального солитона (коэффициент  $c$  в (12)), а также большее количество данных о форме солитона и его параметрах в разные моменты времени.

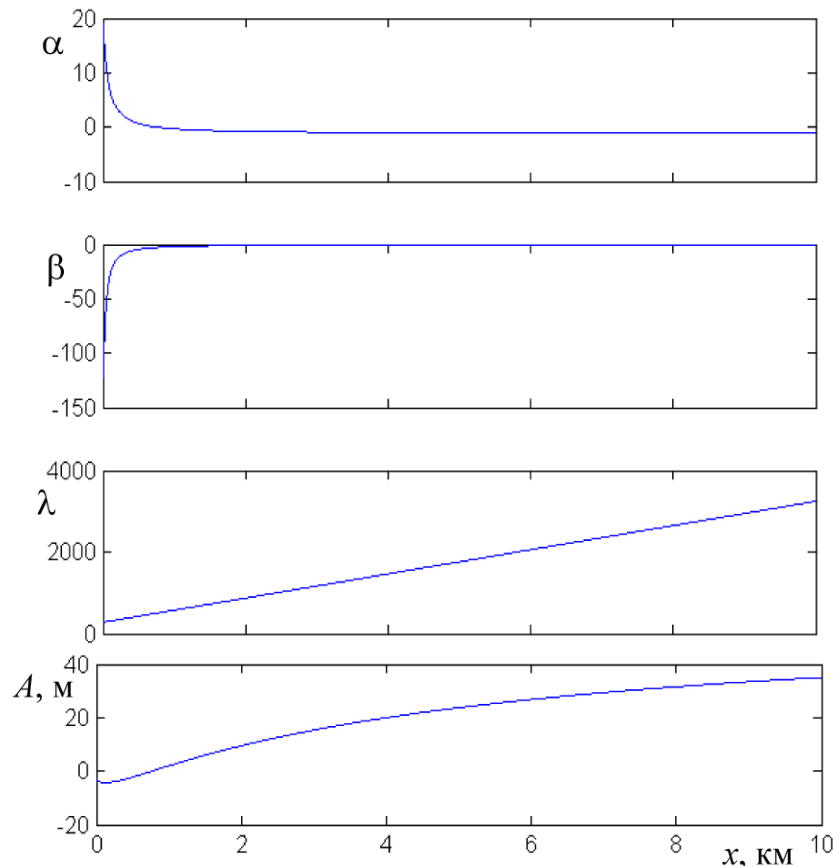


Рис.5. Коэффициенты безразмерного уравнения Гарднера и квазистационарная амплитуда фронта предельного солитона.

\*\*\*



Возможности аналитического описания неквазистационарной эволюции солитонов в рамках предложенного подхода, конечно, не ограничиваются рассмотренным примером. Столь же подробно можно исследовать случаи, когда коэффициенты  $\mu(t)$ ,  $\alpha(t)$  в уравнении (2) меняются произвольным степенным ( $\sim(1+\epsilon t)^\beta$ ) или экспоненциальным ( $\sim \exp \epsilon t$ ) образом. Интересны в качестве приложения к ВВ задачи о прохождении солитона через локализованную неоднородность или область с перепадом параметров среды. Представляется важным, как с общеволновой точки зрения, так и с точки зрения приложений, обобщение развитого здесь описания на двухмерный случай, т.е. вывод уравнений «геометрической оптики» для кинков. Предложенный приближенный подход позволяет провести оценки амплитуды и структуры ИВВ в произвольный момент времени при известных параметрах гидрологии и топографии исследуемого района.

*В заключение авторы выражают благодарность Л.А.Островскому за полезные критические замечания, а также Е.Н.Пелиновскому, Т.Г.Талиповой и А.А.Слюняеву за предоставленные результаты численного счета уравнения Гарднера с переменными коэффициентами.*

### Литература

1. *Серебряный А.Н.* Наблюдение внутренних волн, отраженных от материкового склона Камчатки // Докл. РАН. 2000. Т.374, № 3. С.1179–1182.
2. *Serebryany A.N.* Internal waves on Pacific shelf of Kamchatka (Preliminary results of internal wave field observations) // Proc. of the U.S.-Russia Workshop on experimental acoustics / Ed. *V.I.Talanov*. Institute of Applied Physics, Nizhniy Novgorod. 2000. P.116–122.
3. *Серебряный А.Н., Пао К.П.* Прохождение нелинейной внутренней волны через точку переворота на шельфе // Докл. РАН. 2008. Т.420, № 4. С.543–547.
4. *Apel J.R., Ostrovsky L.A., Stepanyants Y.A., Lynch J.F.* Internal solitons in the ocean // Technical Report WHOI-05. 2005.
5. *Сабинин К.Д., Серебряный А.Н.* «Горячие точки» в поле внутренних волн в океане // Акуст. журн. 2007. Т.53, № 3. С.410–436.
6. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Solitary wave lowly varying solitary waves in Korteweg-de Vries equation // Proc. Roy. Soc. 1979. A368. P.359–375.
7. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Solitary wave transformation in a medium with sing-variable quadratic nonlinearity and cubic nonlinearity // Physica D.1999. V.132. P.40–62.
8. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Modelling Internal Solitary Waves in the Coastal Ocean // Surv. Geophys. 2007. V.28. P.273–287.
9. *Nakoulima O., Zabybo N., Pelynovsky E., Talipova T., Slunyaev A., Kurkin A.* Analytical and numerical studies of the variable-coefficient Gardner equation // Appl. Math. Comput. 2004. V.152. P.449–471.
10. *Карпман В.И., Маслов Е.М.* Теория возмущений для солитонов // ЖЭТФ. 1977. Т.73. С.532.
11. *Keener J.P., McLaughlin D.W.* Soliton under perturbation // Phys. Rev. A. 1977. V.16. P.777–790.
12. *Kaup D.J., Newell A.C.* Solitons particles, oscillator and in slowly changing media: a singular perturbation theory // Proc. Roy. Soc. London A. 1978. V.301, № 1701. P.413–446.
13. *Ostrovsky L.A., Grue J.* Evolution equations for strongly nonlinear internal waves // Phys. Fluids. 2003. V.15. P.2934–2948.
14. *Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Irisov V.G.* Perturbation theory for kinks and application for multisoliton interactions in hydrodynamics // Phys. Rev. E. 2004. V.69. P.1–10.
15. *Горшков К.А., Соустова И.А., Ермошкин А.В., Зайцева Н.В.* Эволюция составного солитона уравнения Гарднера с переменными коэффициентами // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2012. Т.XLV, № 5. С.324–337.

Статья поступила в редакцию 19.11.2012 г.

