

УДК 551.466.3

© *Е.Н.Пелиновский*<sup>1,2,3</sup>, *Е.Г.Шургалина*<sup>1,2</sup>, 2013

<sup>1</sup>Институт прикладной физики РАН, г.Нижний Новгород

<sup>2</sup>Нижегородский государственный технический университет

<sup>3</sup>Университет Кеплера, г.Линц, Австрия

pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

Выполнено исследование взаимодействия солитонов внутренних волн одной моды в стратифицированном океане, движущихся в одном направлении. Для анализа использовано точное двухсолитонное решение уравнения Кортевега – де Вриза. Обсуждается роль этого процесса в динамике солитонной турбулентности. Показано, что при взаимодействии третий и четвертый моменты волнового поля, играющие важную роль в теории турбулентности как коэффициенты асимметрии и эксцесса, уменьшаются. Полученные результаты сопоставлены с линейной динамикой солитоноподобных импульсов, для которых третий и четвертый моменты увеличиваются в момент столкновения.

**Ключевые слова:** внутренние волны, уравнение Кортевега – де Вриза, солитоны, турбулентность.

При наблюдениях внутренних волн в океане очень часто регистрируются уединенные волны – солитоны или группа солитонов; сводка таких данных приведена, например, в обзорах [1–3]. Их описание очень часто проводится в рамках уравнения Кортевега – де Вриза, справедливого для длинных (по сравнению с глубиной бассейна) волн малой, но конечной амплитуды (по сравнению с толщиной залегания пикноклина), вывод которого можно найти в ряде работ [4–7]. Сейчас активно сопоставляются данные наблюдений солитонов с теоретическими предсказаниями, основанными на уравнении Кортевега – де Вриза [8–10]. Замечательным свойством уравнения Кортевега – де Вриза является его полная интегрируемость [11, 12], практическим приложением которой является доказанная устойчивость солитонов при взаимодействии друг с другом и волновыми пакетами. В результате наблюдаемое поле внутренних волн можно интерпретировать как ансамбль солитонов или солитонный газ. В общем случае из-за нестационарности океанических условий такой ансамбль можно рассматривать как случайный ансамбль солитонов внутренних волн. Выделение интенсивных солитонов из случайного поля внутренних волн во многих случаях происходит «на глаз», поскольку их амплитуды иногда в разы превосходят амплитуды фоновых волн. В то же время слабые по амплитуде солитоны не так заметны и их выделение не является простой задачей, если учитывать нестационарность и неоднородность гидрологических полей. Только в рамках уравнения Кортевега – де Вриза эта задача имеет строгое решение на основе метода обратной задачи рассеяния [13–17], хотя это никогда не использовалось в практике внутренних волн.

Популярным методом исследования случайного поля внутренних волн является его статистический анализ, основанный на функциях вероятностей и спектрах корреляционных функций. Достаточно упомянуть известные спектры Гаррета–Манка [4]. Их интерпретация проводится в рамках теории слабой (волновой) турбулентности, основанной на представлении волнового поля в качестве набора слабозаимодействующих (коррелированных) спектральных компонент [18, 19]. В то же время уединенные волны-солитоны представляют собой сильнокоррелированные нелинейные образования и для них теория

слабой турбулентности не применима. Проблеме описания солитонного газа в настоящее время уделяется большое внимание [20–26], при этом пока удается получить кинетическое уравнение только для параметров солитонов. В то же время для интерпретации натуральных данных важно иметь статистические характеристики самого волнового поля: например, распределение экстремальных высот, свидетельствующее об опасности внутренних волн. Экспериментально такие распределения находились для ряда районов Мирового океана [27–29], но они не интерпретировались в рамках теоретической модели.

Здесь мы рассмотрим элементарный акт солитонной турбулентности, а именно взаимодействие двух изолированных солитонов внутренних волн в однородной и стационарной среде. Основное внимание будет уделено влиянию нелинейных эффектов на моменты волнового поля вплоть до четвертого.

**Теоретическая модель.** Наиболее строго уравнение Кортевега – де Вриза с использованием асимптотической процедуры выведено в работах [4–6]. Приведем основные уравнения модели в приближении Буссинеска (изменения плотности по вертикали достаточно малы – типичное приближение для природных водоемов) и в пренебрежении вязкими процессами, а также не будем учитывать фоновые течения. В частности, если нет изменения характеристик среды по горизонтали, основным уравнением для двухмерного волнового потока является уравнение Кортевега – де Вриза

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где  $\eta(x, \tau)$  – вертикальное смещение изопикнической поверхности (поверхность равной плотности) от горизонтального уровня:

$$\zeta(x, y, \tau) = \eta(x, \tau)\Phi(y). \quad (2)$$

Здесь  $x$  – горизонтальная, а  $y$  – вертикальная (направленная вверх) координаты;  $\tau$  – время;  $\Phi(y)$  – модовая функция внутренних волн, являющаяся решением задачи Штурма–Лиувилля с нулевыми граничными условиями на дне и свободной поверхности (приближение «твердой крышки»):

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{N^2(y)}{c^2} \Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(-H) = 0, \quad (3)$$

где  $H$  – глубина бассейна (начало координат связывается с водной поверхностью);  $N(y)$  – частота Вьяйсяля–Брента (плавучести), определяемая через вертикальное распределение плотности воды  $\rho_0(y)$ :

$$N(y) = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy}}, \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести;  $c$  – собственное значение задачи Штурма–Лиувилля, определяющее скорость распространения длинных внутренних волн в линейном приближении. Легко показать, что краевая задача (3) имеет дискретный спектр различающихся собственных значений [4], на чем мы не останавливаемся. В рамках данной модели каждая мода внутренних волн распространяется независимо, так что не будем в дальнейшем использовать индекс для выбора определенной моды внутренних волн. Фактически уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью  $c$ , так что координата  $x$  есть  $x - ct$ . Отметим также, что мы используем условие нормировки на функцию  $\Phi(y)$ :  $\Phi_{\max} = 1$ , так что функция  $\eta(x, t)$  описывает вертикальное смещение изопикны в максимуме моды.

Коэффициенты уравнения (1)  $\alpha$  и  $\beta$  – соответственно коэффициенты нелинейности и дисперсии – определяются через вертикальное распределение плотности воды

$$\alpha = \left( \frac{3c}{2} \right) \frac{\int_{-H}^0 (d\Phi / dy)^3 dy}{\int_{-H}^0 ((d\Phi / dy)^2 dy)}, \quad (5)$$

$$\beta = \left( \frac{c}{2} \right) \frac{\int_{-H}^0 \Phi^2 dy}{\int_{-H}^0 (d\Phi / dy)^2 dy}. \quad (6)$$

Важно отметить, что уравнение Кортевега – де Вриза выводится для внутренних волн в океане с произвольной плотностной стратификацией, как непрерывной, так и многослойной. На практике достаточно использовать дискретный набор плотности воды на разных горизонтах, чтобы выполнить все вычисления коэффициентов уравнения Кортевега – де Вриза. И наконец, если коэффициент дисперсии всегда положителен, то коэффициент нелинейности может быть как положителен (пикноклин прижат ко дну), так и отрицателен (пикноклин около морской поверхности), а также обращаться в нуль (пикноклин находится посередине). В последнем случае необходимо продолжать асимптотическую процедуру и выводить расширенное уравнение Кортевега – де Вриза [5].

**Солитонные решения уравнения Кортевега – де Вриза.** Прежде всего, перейдем к канонической форме уравнения Кортевега – де Вриза, используя замены

$$t = \frac{\beta\tau}{L^3}, \quad u = \frac{\alpha L^2 \eta}{6\beta}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad (7)$$

где  $L$  – характерный масштаб, например размер расчетной области, так что уравнение (1) записывается в полностью безразмерной форме (далее штрих у  $x$  опущен):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8)$$

Естественно, что замена (7) имеет смысл при ненулевой нелинейности ( $\alpha \neq 0$ ), что мы и будем предполагать, иначе задача становится линейной. Уже говорилось, что уравнение Кортевега – де Вриза является полностью интегрируемым, так что его многосолитонные решения могут быть представлены в явном виде. В частности, односолитонное решение есть

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[ K(x - 4K^2 t - x_0) \right], \quad A = 2K^2, \quad (9)$$

определяемое двумя независимыми параметрами: амплитудой  $A$  и фазой  $x_0$  (начальное положение солитона). Двухсолитонное решение имеет вид [11, 12]

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln [\Gamma(x, t)], \quad (10)$$

$$\text{где } \Gamma = e^{-\varphi_1} + e^{-\varphi_2} + \lambda^2 e^{-\varphi_1 - \varphi_2}, \quad \lambda = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}, \quad \varphi_i = 2(K_i x - 4K_i^3 t - \xi_i) \quad (11)$$

и  $\xi_i$  – фазы солитонов в начальный момент времени;  $K_i$  – обратная ширина солитона,  $i = 1, 2$ . Их смысл понятен, если мы воспользуемся асимптотическим представлением формулы (10) для случая, когда солитоны разделены в пространстве:

$$u(x, t) = A_1 \operatorname{sech}^2 \left[ K_1(x - 4K_1^2 t - \xi_1 - \Delta) \right] + A_2 \operatorname{sech}^2 \left[ K_2(x - 4K_2^2 t - \xi_2 + \Delta) \right], \quad A_{1,2} = 2K_{1,2}^2; \quad (12)$$

при этом предполагается, что первый солитон, имеющий бóльшую амплитуду ( $A_1 > A_2$ ), находится позади второго ( $\xi_2 \gg \xi_1$ ). Тогда дополнительный фазовый сдвиг между солитонами из-за нелинейного взаимодействия есть

$$\Delta = \ln(\lambda) = \ln\left(\frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2}\right). \quad (13)$$

Несмотря на относительно простую запись двухсолитонного решения, не очень-то много результатов известно для описания структуры волнового поля в момент взаимодействия. Еще в классической статье Лакса [30] отмечались три типа взаимодействия:

1)  $1 < A_1/A_2 < 2.62$  – обменное взаимодействие, когда первый солитон в процессе догона отдает энергию малому второму солитону, так что последний вырастает до размеров первого. В момент наибольшего сближения солитонов результирующее поле имеет двухгорбую форму с локальным минимумом между ними:

$$u_{\min} = A_1 - A_2. \quad (14)$$

2)  $A_1/A_2 > 3$  – обгонное взаимодействие, когда первый солитон перегоняет второй, восстанавливая свою амплитуду. В момент обгона волновое поле имеет одногорбую структуру с максимумом

$$u_{\max} = A_1 - A_2. \quad (15)$$

Как видим, в этот момент у нас нет линейной суперпозиции солитонов, хотя внешне процесс происходит как в линейной теории.

3)  $2.62 < A_1/A_2 < 3$  – промежуточная зона между обгонным и обменным взаимодействиями.

Чтобы лучше понять роль нелинейных взаимодействий будем анализировать также процесс линейной интерференции солитонов, описываемый формулой (12). Конечно, это не есть полностью линейная задача, поскольку в линейной теории скорость импульса не зависит от амплитуды. Поэтому формула (12) не является решением линейной теории внутренних волн. Тем не менее, сопоставление нелинейной динамики в рамках (10) и эквивалентной линейной в рамках (12) представляется весьма важным. В сущности, в рамках (12) мы имеем дело с двумя частицами (их «массы»  $\int u_i(x,t)dx = 4K_i$ ), движущимися с постоянными скоростями  $4K_i^2$ . В момент соударения массы частиц складываются, как и амплитуды волнового поля:

$$u_{\max} = A_1 + A_2. \quad (16)$$

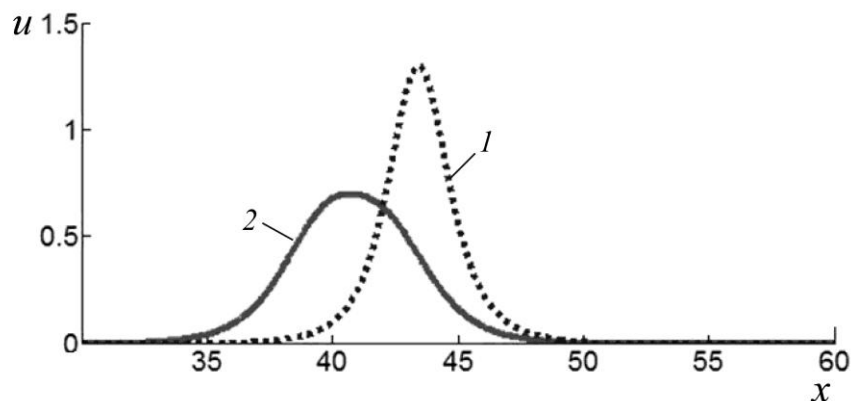


Рис. 1. Суммарное поле в линейном (1) и нелинейном (2) приближениях.

$$1 - t = 14.3, 2 - t = 12.5.$$

Как видим, максимум волнового поля в линейном и нелинейном приближениях оказывается различным (ср. формулы (15) и (16)). Процесс обгона в рамках обоих приближений иллюстрируется на рис.1 для случая  $A_1 = 1$  и  $A_2 = 0.3$ . Обратим внимание, что максимальное значение амплитуды волнового поля достигается в разные моменты времени, и более быстро этот процесс происходит в рамках нелинейной теории. Последнее связано с фазовым сдвигом (13) между солитонами, возникающим из-за нелинейности.

В случае обменного взаимодействия солитонов результирующее поле представлено на рис.2 для случая  $A_1 = 1$  и  $A_2 = 0.9$ . И здесь солитоны в нелинейной теории взаимодействуют быстрее, чем в линейном приближении.

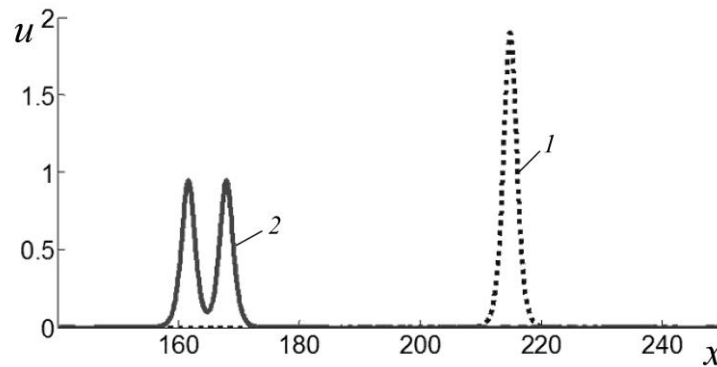


Рис.2. Волновое поле в случае обменного взаимодействия.

$$1 - t = 100, 2 - t = 74.$$

**Моменты двухсолитонного поля внутренних волн.** Уже говорилось, что задача о взаимодействии двух солитонов может оказаться важной, чтобы понимать динамику солитонного газа, для которого доказано, что парные взаимодействия являются превалирующими [20, 23–25]. Обычно статистические поля характеризуют моментами волнового поля вплоть до четвертого:

$$M_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n(x,t) dx \quad (n = 1, 2, 3, 4), \quad (17)$$

и в принципе такой же анализ должен быть сделан для солитонного газа. Здесь мы рассмотрим элементарный акт взаимодействия двух солитонов с позиций теории моментов.

Как известно, в силу интегрируемости уравнения Кортевега – де Вриза оно допускает бесконечное число сохраняющихся величин – инвариантов (см., напр., [31]). Первые два инварианта имеют ясный физический смысл – сохранение объема вытесненной воды (массы) и волновой энергии, и они совпадают с моментами (14) для  $i = 1$  и  $2$ . В теории турбулентности они определяют среднее значение поля и его дисперсию, и их постоянство означает, что нелинейность не меняет эти важные характеристики волнового поля (во многих задачах нелинейность приводит к изменению среднего значения – так называемый процесс set-up). Однако в случае линейного взаимодействия импульсов (12) только первый момент сохраняется. Его величина в линейном и нелинейном приближениях оказывается одинаковой и равной

$$M_1 = \int u(x,t) dx = 4(K_1 + K_2). \quad (18)$$

Второй момент в случае двухсолитонного решения уравнения Кортевега – де Вриза (10), как уже говорилось, также сохраняется и равен

$$M_2 = \int u^2(x,t) dx = \frac{16}{3}(K_1^3 + K_2^3). \quad (19)$$

В случае же взаимодействия импульсов (12) по линейному сценарию выражение (19) дает начальное значение момента, и в дальнейшем он меняется (рис.3). Его изменение достаточно сильное – около 60 %.

Третий и четвертый моменты волнового поля, определяющие в теории турбулентности асимметрию и эксцесс, не сохраняются для обоих случаев взаимодействия. Численные расчеты, сделанные для двух солитонов с амплитудами  $A_1 = 1$  и  $A_2 = 0.3$ , показали, что эти моменты убывают в момент взаимодействия для нелинейного взаимодействия и увеличиваются для линейного (рис.4, 5).

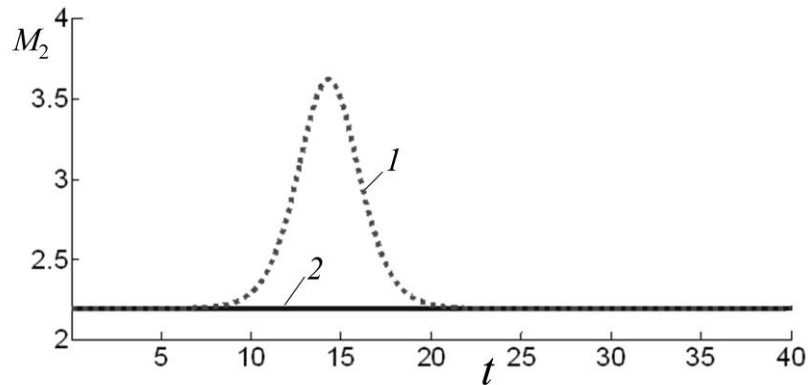


Рис.3. Зависимость второго момента  $M_2$  от времени в случае двухсолитонного линейного (1) и нелинейного (2) взаимодействий ( $A_1 = 1, A_2 = 0.3$ ).

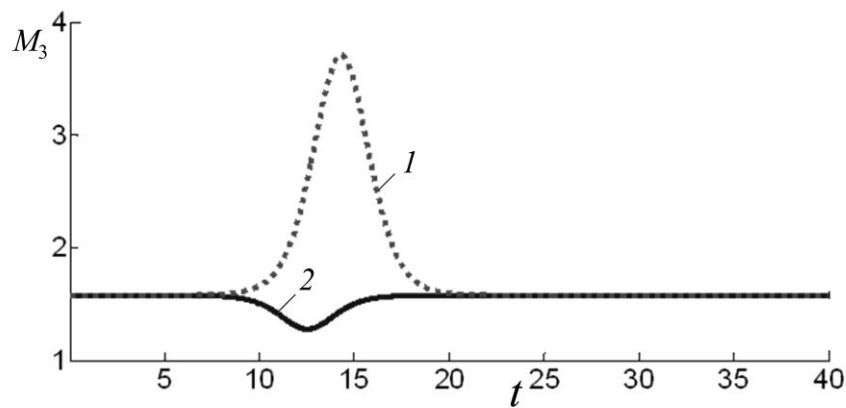


Рис.4. Зависимость третьего момента  $M_3$  от времени в случае двухсолитонного линейного (1) и нелинейного (2) взаимодействий.

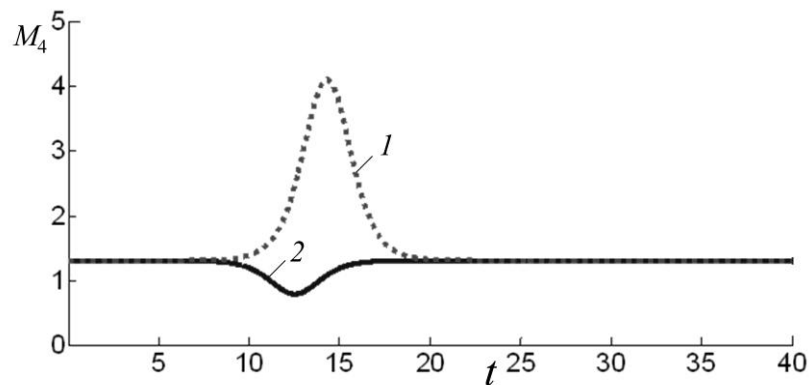


Рис.5. Зависимость четвертого момента  $M_4$  от времени в случае двухсолитонного линейного (1) и нелинейного (2) взаимодействий.

Вне зоны взаимодействия эти интегралы в обоих приближениях выходят на асимптотические значения, соответствующие невзаимодействующим солитонам:

$$M_3 = \frac{8 \cdot 16}{15} (K_1^5 + K_2^5), \quad (20)$$

$$M_4 = \frac{16 \cdot 32}{35} (K_1^7 + K_2^7). \quad (21)$$

Изменения третьего и четвертого моментов значительны (особенно в линейном приближении), и, следовательно, взаимодействие двух солитонов сильно влияет на моменты волнового поля, так что этот эффект может оказаться важным для понимания природы солитонной турбулентности. Физически уменьшение третьего и четвертого моментов для нелинейного взаимодействия можно объяснить уже упоминавшимся выше эффектом уменьшения амплитуды результирующего импульса в момент взаимодействия. Для линейного же, наоборот: амплитуда суммарного импульса значительно вырастает, и это вносит огромный вклад в изменения третьего и четвертого моментов.

На рис.6 представлено изменение величин третьего и четвертого моментов  $\Delta M/M_{\max}$  в зависимости от отношения амплитуд солитонов в случае нелинейного взаимодействия. Здесь  $\Delta M = M_{\max} - M_{\min}$  – разница между начальным и минимальным значениями моментов. Полученные кривые подобны друг другу; они немонотонные и их максимум приходится на  $A_1/A_2 \approx 2.62$ , что соответствует переходной области между обгонным и обменным двухсолитонными взаимодействиями. Поэтому двухсолитонное взаимодействие с амплитудным соотношением, близким к критическому, вносит бóльший вклад в высшие моменты солитонной турбулентности.

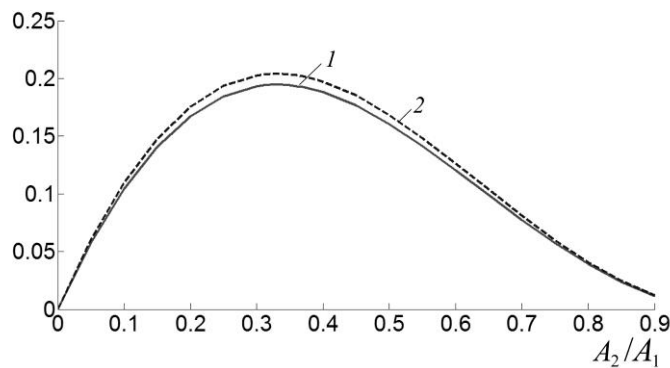


Рис.6. Зависимость  $\Delta M_3/M_{\max}$  (1) и  $\Delta M_4/M_{\max}$  (2) двухсолитонного нелинейного взаимодействия от отношения амплитуд солитонов  $A_2/A_1$ .

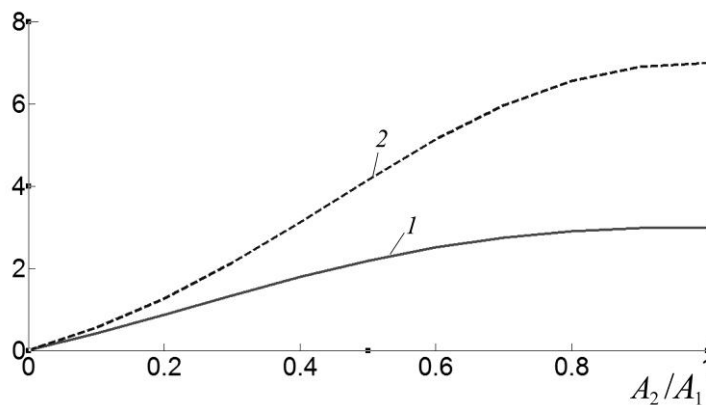


Рис.7. Зависимость  $\Delta M_3/M_{\min}$  (1) и  $\Delta M_4/M_{\min}$  (2) для линейного взаимодействия двух импульсов от отношения амплитуд солитонов  $A_2/A_1$ .

На рис.7 представлена аналогичная зависимость для третьего и четвертого моментов при линейном взаимодействии импульсов. Здесь  $\Delta M = M_{\max} - M_{\min}$  – разница между максимальным и начальным значениями моментов. Как и следовало ожидать, соответствующие кривые являются монотонными, поскольку реализуется только обгонное взаимодействие. В предельном случае, когда амплитуды солитонов сравнивались, величины моментов выходят на асимптотические значения:  $\Delta M_3/M_3 = 3$  и  $\Delta M_4/M_4 = 7$ , легко находимые из (17). Однако с приближением амплитуд солитонов друг к другу процесс обгона проходит за очень большое время.

\*\*\*

Итак, показано, что в процессе нелинейного взаимодействия двух солитонов внутренних волн, распространяющихся в одну сторону, в отличие от первых двух моментов (масса и энергия) третий и четвертый моменты (имеющие отношение в теории турбулентности к коэффициентам асимметрии и эксцесса) не сохраняются и уменьшаются. В то же время линейное взаимодействие двух солитонов ведет к увеличению всех моментов, за исключением первого. Взаимодействие двух солитонов играет важную роль в теории волновой турбулентности и может рассматриваться как элементарный акт солитонной турбулентности.

Автор выражает благодарность фонду «Династия».

*Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., а также грантов РФФИ (12-05-33087, 12-05-00472, 13-05-97037, 13-05-90424), ASF-FWF (P24671) и МК-1440.2012.5.*

## Литература

1. *Ostrovsky L., Stepanyants Yu.* Do internal solitons exist in the ocean? // *Rev. Geophys.* 1989. N 27. P.293–310.
2. *Ostrovsky L.A., Stepanyants Y.A.* Internal solitons in laboratory experiments: Comparison with theoretical models. *Chaos.* 2005. V.15. P.037111.
3. *Apel J., Ostrovsky L.A., Stepanyants Y.A., Lynch J.F.* Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V.121. N 2. P.695–722.
4. *Мирополюцкий Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
5. *Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е., Лэмб К.* Нелинейные внутренние волны в океане, стратифицированном по плотности и течению // *Океанология.* 2000. Т.40. № 6. С.805–815.
6. *Benney D.J.* Long nonlinear waves in fluid flows // *J. Math. Phys.* 1966. V.45. P.52–63.
7. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Poloukhina O.* Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface // *Nonlin. Proc. Geophys.* 2002. V.9. P.221–235.
8. *Наговицын А.П., Пелиновский Е.Н., Степанянц Ю.А.* Наблюдение и анализ уединенных внутренних волн в прибрежной зоне Охотского моря // *Мор. гидрофиз. журн.* 1990. № 1. С.54–58.
9. *Zheng Q., Yuan Y., Klemas V., Yan X-H.* Theoretical expression for an ocean internal soliton synthetic aperture radar image and determination of the soliton characteristic half width // *J. Geophys. Res.* 2001. V.106. N C12. P.31415–31423.
10. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н.* Моделирование распространяющихся длинных внутренних волн в неоднородном океане: теория и верификация // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2013. Т.6. № 2.
11. *Захаров В.Е., Манакон С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
12. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
13. *Osborne A.R.* Behavior of solitons in random-function solutions of the periodic Korteweg-de Vries equation // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V.71. P.3115–3118.
14. *Osborne A.R.* Solitons in the periodic Korteweg-de Vries equation, the  $\Theta$ -function representation, and the analysis of nonlinear, stochastic wave trains // *Phys. Rev. E* 1995. V.52. N 1. P.1105–1122.
15. *Osborne A.R.* *Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform.* Academic Press, 2010.
16. *Osborne A.R., Segre E., Boffetta G.* Soliton basis states in shallow-water ocean surface waves // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V.67. P.592–595.
17. *Osborne A.R., Serio M., Bergamasco L., Cavaleri L.* Solitons, cnoidal waves and nonlinear interactions in shallow-water ocean surface waves // *Physica D.* 1998. V.123. P.64–81.



18. Пелиновский Е.Н., Раевский М.А. Слабая турбулентность внутренних волн в океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1977. Т.13. № 2. С.187–193.
19. Lvov Y.V., Polzin K.L., Tabak E.G. Energy spectra of the ocean's internal wave field: theory and observations // Phys. Rev. Lett. 2004. V.92. N 12. P.128501.
20. Захаров В. Е. Кинетическое уравнение для солитонов // ЖЭТФ. 1971. Т.60. № 3. С.993–1000.
21. Гуревич А.В., Мазур Т.Г., Зыбин Н.Г. Статистический предел в полностью интегрируемой системе с детерминистскими начальными условиями // ЖЭТФ. 2000. Т.90. С.797–817.
22. Pelinovsky E.N., Shurgalina E.G., Sergeeva A.V., Talipova T.G., El G., Grimshaw R.H.J. Two-soliton interaction as an elementary act of soliton turbulence in integrable systems. // Phys. Lett. A. 2013. V.377. P.272-275.
23. El G.A., Kamchatnov A.M. Kinetic equation for a dense soliton gas // Phys. Rev. Lett. 2005. V.95. P.204101.
24. El G.A., Krylov A.L., Molchanov S.A., Venakides S. Soliton turbulence as the thermodynamic limit of stochastic soliton lattices // Physica D. 2005. V.152–153. P.653–664.
25. El G.A., Kamchatnov A.M., Pavlov M.V., Zykov S.A. Kinetic equation for a soliton gas and its hydrodynamic reductions // J. Nonlin. Sci. 2011. V.21. P.151–191
26. Zakharov V.E. Turbulence in integrable systems // Stud. Appl. Math. 2009. V.122. P.219–234.
27. Иванов В.А., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г. Частота повторяемости интенсивных внутренних волн в тропической зоне Атлантики // ДАН СССР. 1991. Т.318. № 6. С.1468–1471.
28. Иванов В.А., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г. Частота повторяемости амплитуд внутренних волн в Средиземном море // Океанология. 1993. Т.33. С.180–183.
29. Pelinovsky E., Holloway P., Talipova T. A statistical analysis of extreme events in current variations due to internal waves from the Australian North West Shelf // J. Geophys. Res. 1995. V.100. N C12. P.24,831–24,839.
30. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968. V.21. P.467–490.
31. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.

Статья поступила в редакцию 30.10.2012 г.

