

УДК 531.756

© Г.А.Федотов, 2013

ЗАО «Гранит-7», Санкт-Петербург

g.a.fedotov@gmail.com

## НОВАЯ МОДИФИКАЦИЯ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ МОРСКОЙ ВОДЫ

Предложено два варианта новой модификации гидростатического метода измерения плотности морской воды в натуральных условиях. Первый вариант основан на совместной обработке сигналов трех дифференциальных датчиков давления, входы которых расположены на трех, в общем случае неортогональных, осях, второй – на совместной обработке сигналов четырех жестко связанных недифференциальных датчиков давления. В обоих вариантах выходной сигнал системы датчиков давления после совместной обработки нечувствителен к наклону системы в исследуемой морской среде, что повышает точность определения плотности воды в реальных условиях.

**Ключевые слова:** морская вода, измерение плотности, гидростатический метод, датчик давления.

Прямое измерение плотности морской воды может служить основой определения абсолютной солености морской воды путем ее вычисления по измеренным значениям плотности и температуры [1]. Важность разработки методов измерения плотности морской воды возрастает в связи с рекомендацией Межправительственной океанографической комиссии (Intergovernmental Oceanographic Commission) ЮНЕСКО использовать новое «Термодинамическое уравнение состояния морской воды – 2010» (ТУС-10) – «The International Thermodynamic Equation of Seawater – 2010» (TEOS-10), в которое вместо практической солености входит абсолютная соленость [2]. Актуальность совершенствования методов измерения плотности в натуральных условиях обусловлена также тем, что в настоящее время наблюдается явный дефицит эффективных методов и средств измерения плотности морской воды [3].

**Постановка задачи.** В работе [4] сообщается о разработке гидростатического измерителя плотности морской воды. Согласно этой работе, «...принцип действия измерителя основан на использовании главного уравнения гидростатики при вычислении плотности, т.е. через ее связь с разностью давления по глубине на фиксированном расстоянии. Используются три дифференциальных датчика давления, входы которых расположены на трех ортогональных осях. Использование трех датчиков связано с необходимостью корректировать изменения показаний давления из-за наклона прибора». Приводится формула для вычисления разности давлений на двух глубинах по разностям давлений, измеренным первым, вторым и третьим дифференциальными датчиками давления при одинаковой длине измерительных баз датчиков [4].

Цель данной работы – расширить функциональные возможности гидростатического метода определения плотности морской воды путем обобщения метода, предложенного в [4], в двух направлениях. Первое направление относится к случаю произвольной ориентации осей, на которых расположены входы дифференциальных датчиков давления, и произвольных расстояний между входами датчиков. Второе направление обобщения – случай использования системы жестко связанных недифференциальных датчиков давления при произвольной конфигурации и ориентации этой системы в пространстве.

**Метод определения плотности морской воды по градиенту гидростатического давления.** Условие равновесия несжимаемой жидкости во внешнем гравитационном поле может быть записано в векторном виде [5]:

$$\text{grad}P = \rho \vec{g}; \quad (1)$$

здесь  $\text{grad}P$  – вектор градиента гидростатического давления;  $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения. Из (1) следует выражение для плотности жидкости:

$$\rho = \frac{|\text{grad}P|}{g}. \quad (2)$$

С помощью (2) плотность морской воды  $\rho$  может быть определена по измеренному модулю вектора градиента гидростатического давления в воде  $|\text{grad}P|$  и по известной величине ускорения свободного падения  $g$ . Следовательно, задача определения плотности сводится фактически к определению модуля вектора градиента давления.

При определении величины  $|\text{grad}P|$  с помощью системы жестко связанных датчиков давления целесообразно учесть два известных свойства вектора. Первое: любой вектор в трехмерном пространстве можно единственным образом представить в виде суммы трех составляющих вдоль осей произвольной косоугольной системы координат, если эти оси некопланарны. Второе свойство: абсолютная величина вектора инвариантна относительно выбора системы координат. Наряду с указанными двумя математическими свойствами вектор  $\text{grad}P$  обладает также важным физическим свойством: в условиях равновесия жидкости этот вектор всегда направлен вертикально вниз.

Вследствие указанных свойств вектора  $|\text{grad}P|$  выполняются следующие два равенства:

$$\text{grad}P = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3; \quad (3)$$

$$|\text{grad}P| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 \cos \alpha_{12} + a_2a_3 \cos \alpha_{23} + a_1a_3 \cos \alpha_{13})} = \text{inv}. \quad (4)$$

Здесь для краткости введены обозначения:  $\text{grad}_\xi P \equiv \vec{a}_1$ ,  $\text{grad}_\eta P \equiv \vec{a}_2$ ,  $\text{grad}_\zeta P \equiv \vec{a}_3$ . Векторы  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  – составляющие вектора  $\text{grad}P$  вдоль осей  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$  косоугольной системы координат  $\xi \eta \zeta$  (рис.1).  $\alpha_{ik}$  – углы между положительными направлениями осей  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$ :  $\alpha_{12}$  – угол между осями  $O\xi$  и  $O\eta$ ,  $\alpha_{13}$  – угол между осями  $O\xi$  и  $O\zeta$ ,  $\alpha_{23}$  – угол между осями  $O\eta$  и  $O\zeta$ ;  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  – координаты вектора  $\text{grad}P$  (алгебраические величины) в системе  $\xi\eta\zeta$ . При выводе выражения (4) использовано соотношение  $|\text{grad}P| = \sqrt{(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)^2}$ .

На рис.1 изображены также векторы  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2$ ,  $\vec{b}_3$ , лежащие на осях  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\zeta$ . Штриховые линии на рис.1 представляют собой перпендикуляры, опущенные из конца вектора  $\text{grad}P$  на оси косоугольной системы координат. Величина  $b_i$  положительна, если направление  $\vec{b}_i$  совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси, и отрицательна, если направление  $\vec{b}_i$  противоположно положительному направлению оси. Очевидно, что значения скалярных величин  $b_i$  определяются выражениями

$$\begin{cases} b_1 = |\text{grad}P| \cos \gamma_{a\xi} \\ b_2 = |\text{grad}P| \cos \gamma_{a\eta} \\ b_3 = |\text{grad}P| \cos \gamma_{a\zeta} \end{cases} \quad (5)$$

где  $\gamma_{a\xi}$ ,  $\gamma_{a\eta}$ ,  $\gamma_{a\zeta}$  – углы между направлением вектора  $\text{grad}P$  и положительным направлением соответствующей оси. Рис.1 и выражения (5) иллюстрируют физический смысл величин  $b_i$ . А именно,  $b_1, b_2, b_3$  – ортогональные проекции вектора градиента давления на оси  $O\xi, O\eta, O\zeta$ .

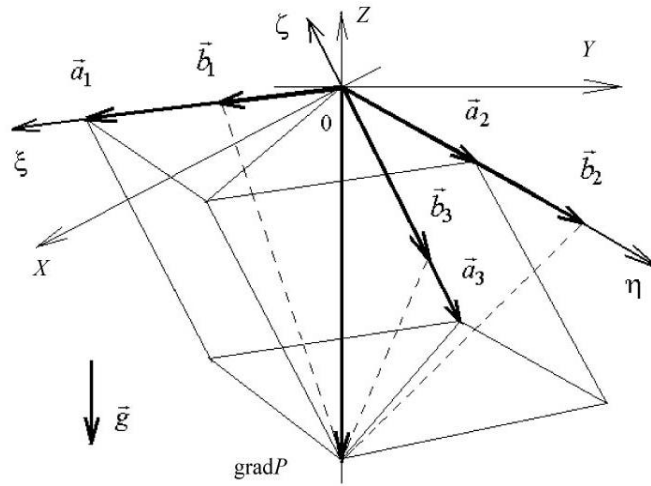


Рис.1. Векторы  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  и пространственные составляющие  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  вектора градиента давления вдоль осей косоугольной системы координат.

Величины  $b_1, b_2, b_3$  существенно отличаются от величин  $a^1, a^2, a^3$  и могут быть непосредственно измерены с помощью датчиков давления, расположенных на соответствующих осях: проекция градиента давления на ось равна отношению разности давлений к расстоянию между входами датчиков (для  $a_i$  подобная операция справедлива только в прямоугольной системе координат). С другой стороны, можно отметить, что для векторов  $\vec{b}_i$  не выполняется соотношение, аналогичное (3) для векторов  $\vec{a}_i$ , т.е. в общем случае  $\text{grad}P \neq \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$ ; разложение  $\text{grad}P$  на сумму  $\vec{b}_i$  справедливо только в прямоугольной системе координат.

**Вывод выражения для модуля вектора градиента гидростатического давления.** Из вышеизложенного следует, что с математической точки зрения решение задачи об определении абсолютной величины гидростатического давления сводится в рассматриваемой постановке к определению модуля вектора по известным ортогональным проекциям этого вектора на оси косоугольной системы координат и по известным углам между координатными осями. Введем для краткости обозначения  $c_{ik} \equiv \cos \alpha_{ik}$  и  $s_{ik} \equiv \sin \alpha_{ik}$ . Из геометрических соображений, вытекающих из рис.1, следует (как можно показать), что для определения величин  $a_i$ , входящих в (4), необходимо решить неоднородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 = b_1 \\ c_{12}a_1 + a_2 + c_{23}a_3 = b_2 \\ c_{13}a_1 + c_{23}a_2 + a_3 = b_3 \end{cases} \quad (6)$$

Можно также показать, исходя из (4), что если удалось определить величины  $a_1, a_2, a_3$ , то альтернативным способом вычисления  $a$  является использование более изящного по сравнению с (4) с выражения

$$|\text{grad}P| = \sqrt{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} = \text{inv}. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что решением системы (6) являются следующие значения  $a_i$ :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{b_1(1 - c_{23}^2) + b_2(c_{13}c_{23} - c_{12}) + b_3(c_{12}c_{23} - c_{13})}{C} \\ a_2 = \frac{b_1(c_{13}c_{23} - c_{12}) + b_2(1 - c_{13}^2) + b_3(c_{12}c_{13} - c_{23})}{C} \\ a_3 = \frac{b_1(c_{12}c_{23} - c_{13}) + b_2(c_{12}c_{13} - c_{23}) + b_3(1 - c_{12}^2)}{C} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{Здесь} \quad C \equiv 1 + 2c_{12}c_{13}c_{23} - (c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2). \quad (9)$$

При этом независимо от способа вычисления  $|\text{grad}P|$  – либо через (8) и (4), либо через (8) и (7) – имеем для искомой величины

$$|\text{grad}P| = \sqrt{\frac{B_1 - 2B_2}{C}}, \quad (10)$$

$$\text{где} \quad B_1 \equiv b_1^2 s_{23}^2 + b_2^2 s_{13}^2 + b_3^2 s_{12}^2; \quad (11)$$

$$B_2 \equiv b_1 b_2 (c_{12} - c_{13} c_{23}) + b_1 b_3 (c_{13} - c_{12} c_{23}) + b_2 b_3 (c_{23} - c_{12} c_{13}). \quad (12)$$

Таким образом, с помощью выражений (9)–(12) можно определить величину  $|\text{grad}P|$  модуля градиента гидростатического давления по измеренным ортогональным проекциям  $b_1, b_2, b_3$  вектора градиента на оси косоугольной системы координат, если известны углы  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$  между положительными направлениями этих осей.

**Два варианта модификации гидростатического метода определения плотности.** На рис.2 и 3 построены две декартовы системы координат – прямоугольная  $XYZ$  и косоугольная  $\xi \eta \zeta$ . Ось  $OZ$  направлена вертикально вверх, так что вектор  $\vec{g}$ , а следовательно и вектор  $\text{grad}P$ , антипараллельны оси  $OZ$ . На рис.2 и 3 проиллюстрированы два возможных варианта использования датчиков давления для измерения величин  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), входящих в выражения (9)–(12) для определения модуля вектора градиента давления  $|\text{grad}P|$ . В первом варианте используются три дифференциальных датчика давления (рис.2), во втором – четыре обычных (недифференциальных) датчика давления (рис.3).

Следующие соотношения позволяют экспериментально определить величины  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – ортогональные проекции вектора градиента гидростатического давления на оси  $O\xi, O\eta, O\zeta$ , входящие в формулы (9)–(12) для определения  $|\text{grad}P|$ . В первом варианте – для трех дифференциальных датчиков давления:

$$b_i = \frac{\Delta P_i}{L_i}. \quad (13)$$

Здесь  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – разности координат входов  $i$ -го дифференциального датчика давления:  $L_1 = \xi_1 - \xi_1'$ ,  $L_2 = \eta_2 - \eta_2'$ ,  $L_3 = \zeta_3 - \zeta_3'$  (рис.2);  $\Delta P_i$  – показания  $i$ -го дифференциального датчика давления;  $\Delta P_i = P_i - P_i'$ , где  $P_i$  и  $P_i'$  – значения давления на входах  $i$ -го дифференциального датчика. Во втором варианте – для четырех недифференциальных датчиков давления:

$$b_i = \frac{\Delta P_i}{l_i} = \frac{P_i - P_0}{l_i}. \quad (14)$$

Здесь  $l_i$  ( $i=1,2,3$ ) – координаты входа  $i$ -го датчика давления:  $l_1 = \xi_1$ ,  $l_2 = \eta_2$ ,  $l_3 = \zeta_3$  при условии, что вход нулевого датчика расположен в начале координат;  $P_i$  – значение давления на входе  $i$ -го датчика (рис.3). Выбор нулевого («опорного») датчика давления среди рассматриваемых четырех во втором варианте произволен.

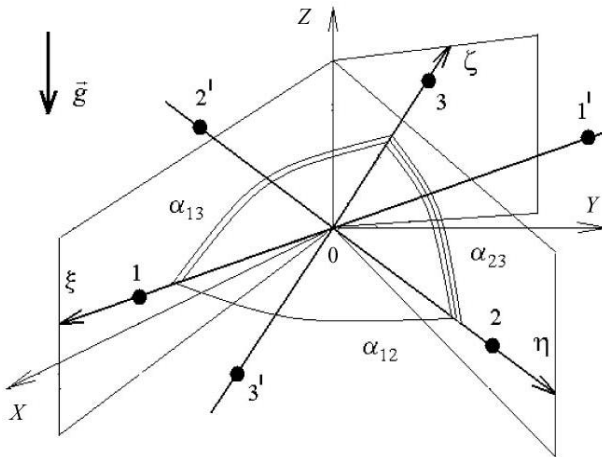


Рис.2. Схематический вид произвольного расположения входов трех дифференциальных датчиков давления (входы датчиков обозначены цифрами) на трех некопланарных осях  $0\xi$ ,  $0\eta$ ,  $0\zeta$ .

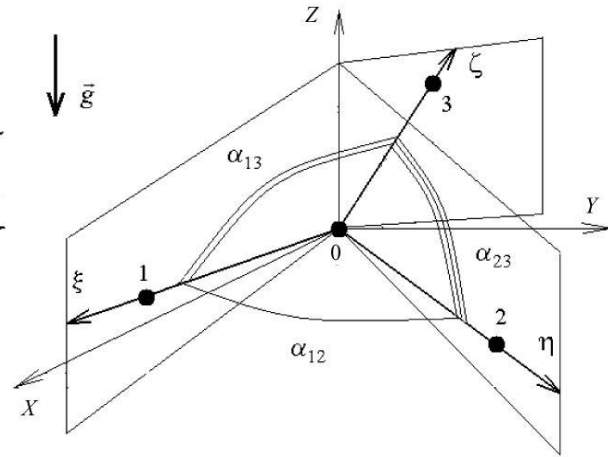


Рис.3. Схематический вид произвольной пространственной конфигурации четырех датчиков давления (входы датчиков обозначены цифрами), не лежащих в одной плоскости.

В обоих вариантах модификации «базовые» расстояния между входами датчиков (и  $L_i$ , и  $l_i$ ) являются известными величинами. Эти расстояния могут быть неодинаковыми для различных датчиков (с учетом требований, обусловленных конструктивными особенностями используемых датчиков давления и носителя гидрофизической аппаратуры), что расширяет функциональные возможности гидростатического метода определения плотности морской воды.

Важной особенностью обоих вариантов рассматриваемого метода с точки зрения его практической ценности является независимость полученного значения  $|\text{grad} P|$  от пространственной ориентации координатной системы, на осях которой расположены входы датчиков давления, при сохранении взаимной ориентации этих осей (углы  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{13}$ ,  $\alpha_{23}$ ) и взаимной конфигурации датчиков. Отсутствие принципиальных ограничений на взаимную ориентацию осей (за исключением требования их некопланарности) также расширяет функциональные возможности гидростатического метода определения плотности морской воды.

**Некоторые частные случаи конфигурации датчиков давления.** Формулы для определения величины  $|\text{grad} P|$  упрощаются, когда расположение датчиков давления обладает свойством симметрии. Если, например, оси, на которых расположены датчики, составляют друг с другом одинаковые углы, то

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} \equiv \alpha_0 \quad (15)$$

и выражения (9)–(12) приводят к следующему равенству:

$$|\text{grad}P| = \sqrt{\frac{1-c_0}{1-c_0^2(3-2c_0)} [(1+c_0)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2c_0(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)]}, \quad (16)$$

где  $c_0 \equiv \cos \alpha_0$ .

Рассмотрим для иллюстрации два частных случая ситуации, описываемой соотношениями (15) и (16). Пусть в первом частном случае  $\alpha_0 = \pi/3$ . Следовательно, согласно (16),

$$|\text{grad}P| = \sqrt{\frac{3}{2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)}.$$

В первом варианте рассматриваемой модификации гидростатического метода этот случай соответствует, например, расположению входов трех дифференциальных датчиков давления на боковых ребрах тетраэдра и/или на прямых линиях, являющихся продолжениями боковых ребер за вершину тетраэдра, и/или на прямых линиях, параллельных боковым ребрам. Во втором варианте модификации этот случай также соответствует расположению входов трех недифференциальных датчиков давления на боковых ребрах тетраэдра и/или на прямых линиях, являющихся продолжениями боковых ребер за вершину, при условии, что вход четвертого (а точнее, нулевого, «опорного») датчика расположен в вершине тетраэдра. Предполагается однородность поля градиента гидростатического давления на пространственных масштабах порядка длины базы дифференциальных датчиков и расстояний между датчиками давления. Два примера возможной конфигурации датчиков давления для  $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} \equiv \alpha_0 = \pi/3$  проиллюстрированы на рис.4.

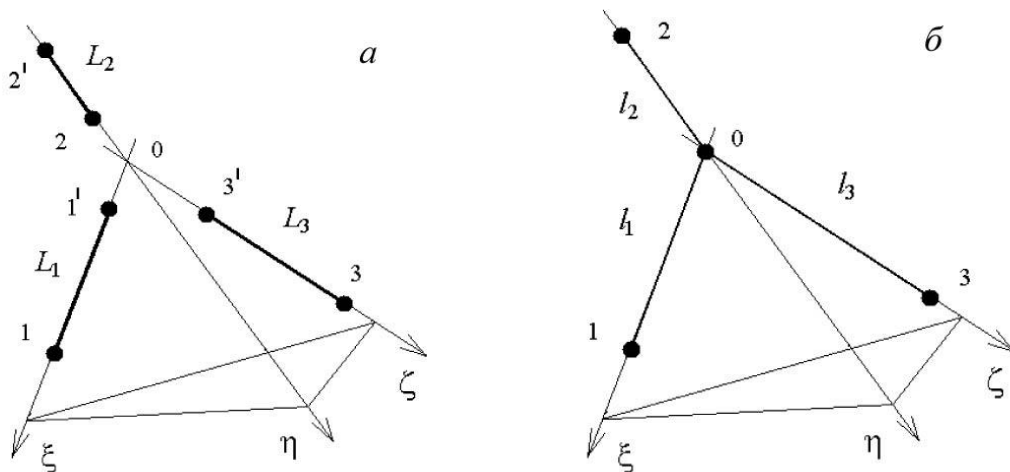


Рис.4. Одна из возможных конфигураций трех дифференциальных (а) и четырех недифференциальных (б) датчиков давления: два расположены на боковых ребрах тетраэдра, один – на продолжении третьего бокового ребра за вершину тетраэдра; «опорный» недифференциальный датчик расположен в вершине тетраэдра.

Пусть во втором частном случае (15) выполняется условие  $\alpha_0 = \pi/2$ , что соответствует расположению датчиков давления на трех взаимно перпендикулярных осях. Тогда, согласно (16),

$$|\text{grad}P| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}. \quad (17)$$

В еще более частном случае, когда три дифференциальных датчика давления не только расположены на трех взаимно перпендикулярных осях, но и имеют одинаковую длину базы  $L$ , из формулы (17) следует

$$|\text{grad } P| = \frac{\sqrt{\Delta P_1^2 + \Delta P_2^2 + \Delta P_3^2}}{L}. \quad (18)$$

Выражение (18) совпадает с очевидным результатом, представленным в работе [4]. Рассмотренный частный случай расположения трех дифференциальных датчиков давления аналогичен другому частному случаю, когда четыре недифференциальных датчика расположены в вершинах пирамиды, основанием которой является равносторонний треугольник, а боковыми гранями – равнобедренные треугольники с прямыми углами при вершине пирамиды. В этом случае из (17) также следует очевидный результат:

$$|\text{grad } P| = \frac{\sqrt{\Delta P_1^2 + \Delta P_2^2 + \Delta P_3^2}}{l}, \quad (19)$$

где  $l$  – расстояние между нулевым датчиком, расположенным в вершине пирамиды, и остальными тремя датчиками, лежащими в основании пирамиды.

Очевидность результатов (18) и (19), полученных как частные случаи выражений (9)–(14), можно рассматривать в качестве косвенного подтверждения правильности решения поставленной задачи. Суть указанного решения заключается в определении плотности морской воды с помощью рабочей формулы (2), а входящей в нее величины градиента гидростатического давления – с помощью выражений (9)–(14).

В заключение следует подчеркнуть, что предложенное в данной работе решение основано на соотношении (1), а, следовательно, применимо только в гидростатическом случае, когда жидкость находится в равновесии, и не применимо для заведомо негидростатических ситуаций в морской среде (например, при конвективных «пробоях», при переливах через пороги в проливах, при наличии коротких волн и т.д.).

\*\*\*

Таким образом, в данной работе предложена новая модификация гидростатического метода определения плотности морской воды, расширяющая его функциональные возможности. Первый вариант модификации основан на совместной обработке сигналов трех дифференциальных датчиков давления при произвольной пространственной ориентации трех жестко связанных между собой некомпланарных осей, на которых располагаются входы дифференциальных датчиков, и при произвольных расстояниях между входами датчиков. Второй вариант модификации основан на совместной обработке сигналов четырех жестко связанных датчиков давления, входы которых не лежат в одной плоскости, при произвольной пространственной ориентации системы датчиков.

Обоснованы рабочие формулы предложенной модификации метода. Приведены выражения, позволяющие в реальном времени определить плотность морской воды по измеренным значениям гидростатического давления и по известным параметрам, характеризующим пространственную конфигурацию входов индивидуальных датчиков давления, образующих систему. Основная практическая ценность обоих вариантов предложенной модификации заключается в том, что выходной сигнал системы датчиков давления, несущий информацию о градиенте гидростатического давления, нечувствителен к наклону этой системы в исследуемой морской среде. Тем самым устраняется влияние важного источника помехи, присутствующего в натуральных экспериментах, что должно повысить точность определения плотности морской воды в реальных условиях гидростатическим методом. Проведение количественных оценок точности определения плотности не входило в задачу данной работы. Можно отметить лишь, что относительная погрешность определения плотности морской воды предложенным методом складывается главным образом из относительной погрешности модуля градиента гидростатического давления и относительной погрешности ускорения свободного падения.

Следует отметить также интересную аналогию между двумя различными эффектами. Первый эффект – это рассмотренная в данной работе компенсация помех, обусловленных неидеальной ориентацией носителя гидрофизической аппаратуры (в том числе связанной с крутильными колебаниями системы датчиков) в исследуемой морской среде, при определении градиента гидростатического давления. Второй эффект – это известное явление подавления аддитивных помех, обусловленных колебаниями подвижного носителя гидрофизической аппаратуры, при исследовании морской турбулентности с помощью виброзащищенных систем преобразователей поля скорости [6]. В обоих случаях снижение уровня помех наблюдается в выходном комбинационном сигнале системы гидрофизических датчиков и достигается путем совместной обработки сигналов индивидуальных датчиков, образующих систему, по специальному алгоритму, параметры которого определяются конфигурацией датчиков. Указанная аналогия между двумя эффектами может являться предметом самостоятельного исследования.

### Литература

1. Греков А.Н., Греков Н.А. Возможности прямых измерений плотности вод *in situ* // Сб. науч. тр. «Системы контроля окружающей среды». Севастополь: Морской гидрофиз. ин-т НАН Украины, 2009. 4 с.
2. Pawlowicz R. What every oceanographer needs to know about TEOS-10 (The TEOS-10 Primer), Oct.2010. [http://www.teos-10.org/pubs/TEOS-10\\_Primer.pdf](http://www.teos-10.org/pubs/TEOS-10_Primer.pdf). 9 p.
3. Смирнов Г.В., Еремеев В.Н., Агеев М.Д. и др. Океанология: средства и методы океанологических исследований. Междун. ассоц. акад. наук, РАН, НАНУ. М.: Наука, 2005. 795 с.
4. Жемков Е.И. Метод и устройство гидростатического измерителя плотности морской воды // Мат-лы 12-й Междун. науч.-техн. конф. «Современные методы и средства океанологических исследований». Ч.I. М., 2011. С.95–97.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 6-е изд. М.: Наука, 1987. 840 с.
6. Федотов Г.А. Принцип формирования виброзащищенных систем преобразователей поля скорости для гидрофизических комплексов // Науч.-техн. сб. «Опыт и перспективы создания информационных гидрофизических комплексов для ВМФ и систем экологического контроля гидросферы». СПб.: ЦНИИ «Гранит», 2004. С.29–36.

Статья поступила в редакцию 11.05.2012 г.

