

УДК 551.466.3

© Д. В. Чаликов, К. Ю. Булгаков

Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН
dmitry-chalikov@yandex.ru

ВОЛНЫ СТОКСА НА КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЕ

Обсуждаются основные свойства волн Стокса на глубокой воде. Рассмотрены различные методы решения уравнений гравитационных волн на поверхности воды. Определяется система конформных координат связанных с поверхностью, приводится стационарная версия полных уравнений в конформной, движущейся с неизвестной скоростью, системе координат. Дается алгоритм очень быстрого численного решения стационарных одномерных потенциальных уравнений, описывающих волны Стокса на произвольной глубине. Исследуются следующие характеристики численных экспериментов с этим алгоритмом для случая глубокой воды: время расчета, число итераций, фазовая скорость, потенциальная, кинетическая и полная энергии, асимметрия, эксцесс. Выделена область существования решения в координатах глубины и крутизны волны Стокса. Исследуются следующие геометрические характеристики волн Стокса как функции глубины и крутизны: вертикальная асимметрия, максимальное значение локальной крутизны, максимальное локальное значение 2-й производной отклонения поверхности от невозмущенной поверхности от горизонтальной декартовой координаты, отношение высоты волны в гребне к глубине подошвы, а также фазовая скорость. Показаны профили волны для различных глубин при интегральной крутизне 0.01. Обсуждается возможная применимость полученных результатов.

Ключевые слова: волна Стокса на конечной глубине, конформное преобразование, численное решение, область неустойчивости.

Полные двумерные нелинейные уравнения потенциального движения жидкости со свободной поверхностью обладают уникальным свойством: они имеют точное стационарное решение. Это решение было описано в классической работе Стокса [1], в которой на основе конформных переменных были открыты волны, названные по имени автора. Удивительно, что во всех последующих работах по одномерным волнам метод, основанный на конформных переменных, использовался сравнительно редко. Исключением является аналитическое решение для стационарных капиллярных волн, найденное Краппером [2]. Точные двумерные и трехмерные уравнения для потенциальных волн решаются методом поверхностного интеграла, однако этот метод громоздок и неточен [3—6]. Большая группа методов численного моделирования двумерных и трехмерных волн основана на уравнении Захарова [7], записанного в следующей поверхности системе координат [8, 9]. Уравнение Захарова точно, но уравнение Лапласа для определения вертикальной скорости на поверхности решается приближенно [8—12]. Конформные переменные начали применяться для теоретических исследований, начиная с 1980-х гг. Первая попытка применения конформного преобразования для построения численной модели была осуществлена Уитни [13], который привел результаты единственного расчета. Формулировка Уитни выглядит неоправданно сложно: он использовал очень низкое пространственное разрешение и, по-видимому, не применял Фурье преобразования. Согласование расчетов с аналитическим решением было не очень точным. Видимо, поэтому работа не была продолжена. Сходные уравнения, но без каких-либо приложений были предложены Овсянниковым [14]. Далее этот метод использовался для аналитических ис-

следований в работах [15, 16]. Танвир [17] на основе конформных переменных исследовал неустойчивость Релея—Тейлора и генерацию поверхностных сингулярностей. Расчет крутых волн Стокса был проведен в работе [18]. Уравнения для декартовых координат свободной поверхности в конформной нестационарной системе координат были получены автором в 1991 г., и, начиная с 1992 г., в соавторстве с Д. Шейниным была разработана численная модель одномерных волн [19—22], основанная на полных нелинейных уравнениях. Модель была проверена путем сравнения с точными стационарными решениями для гравитационных волн (волн Стокса), капиллярно-гравитационных волн и капиллярных волн (волн Краппера). Для волн Стокса и волн Краппера были разработаны эффективные алгоритмы, также основанные на конформных переменных. Оказалось, что численная модель исключительно точна. Это неудивительно, поскольку после перехода к конформным переменным уравнения содержат производные только по «горизонтальной» координате, вычисляемые в пространстве Фурье с большой точностью. Поскольку уравнение Лапласа для потенциала скорости после конформного преобразования координат сохраняет свою форму, «вертикальная» производная от потенциала также вычисляется с высокой точностью.

В последние годы стало ясно, что решение для волны Стокса является не только интересным математическим результатом: сами волны Стокса стали играть важную роль в исследовании физики поверхностного волнения. Традиционный подход к исследованию свойств нелинейных волновых процессов основывался ранее на предположении, что поле поверхностных волн может быть представлено как суперпозиция линейных волн малой амплитуды. Поэтому такие методы резонно называть квазилинейными. Разумеется, представление Фурье может быть введено и для нелинейных волн, однако при переходе к спектру информация о фазах утрачивается. Между тем, распределение фаз в нелинейных волнах оказывается отнюдь не случайным: часть коротких волн распространяется с фазовой скоростью длинных волн, и, строго говоря, они не являются волнами, а вспомогательными модами, участвующими в построении специфической формы нелинейной волны. Из простых визуальных наблюдений волнения на море следует, что большие волны в основном имеют острые вершины и пологие подошвы, т. е. по форме они скорее ближе к волнам Стокса, чем к гармоническим модам. Фурье-анализ точных решений показывает, что поле гравитационных волн является скорее суперпозицией волн Стокса, чем линейных волн [23]. В этих закономерностях имеется, видимо, глубокий физический и даже эстетический смысл: волны Стокса являются точным решением уравнений, тогда как линейные волны неустойчивы и довольно быстро трансформируются, превращаясь в среднем в волны Стокса [24].

Свойства волн Стокса на глубокой воде. Для расчета волн Стокса на глубокой воде метод, основанный на разложении коэффициентов Фурье в степенные ряды вплоть до пятого порядка, был предложен Стоксом [1]. Позже этот метод был обобщен путем введения рекурсивных схем уточняющих последовательные значения коэффициентов в рядах. Все эти методы были достаточно громоздки и обнаруживали плохую сходимость для случаев большой крутизны. Например, в работе [25] использовалось 170 членов ряда Тейлора. Расчеты почти предельной волны Стокса, основанные на асимптотической теории Лонге—Хиггинса были проведены в работе [18]. Этот метод оказался очень точным, но довольно сложным и не очень экономным. Экономные численные методы для расчета всех видов стационарных волн на глубокой воде в конформных координатах были разработаны впервые в работах [19—21], а для случая мелкой воды в [22]. Алгоритм оказался наиболее точным и быстрым методом из всех ранее известных. Точность метода является в принципе бесконечной и ограничивается только точностью представления чисел в компьютере. Алгоритм формально сходится вплоть до крутизны волны Стокса $ak = 0.44$. Волна с крутизной $ak = 0.44$ очень неустойчива и, будучи принята в качестве начального

условия для нестационарной задачи, быстро разрушается [21]. Волна с крутизной $ak = 0.43$ склонна к периодическому режиму: все моды волны Стокса испытывают колебания, амплитуда которых медленно увеличивается. При этом развивается неустойчивость гребня (crest instability), изученная в работах [26, 27]. По-видимому, по прошествии достаточного времени эта волна разрушается. Волны Стокса с крутизной $ak < 0.427$ устойчивы в отсутствие возмущений. Если на волну Стокса наложен шум малой амплитуды, развивается неустойчивость Бенджамина—Фейера [28], которая изучалась во многих работах и была детально воспроизведена численно в [29].

Наиболее важным свойством крутых волн Стокса является эффект концентрации кинетической и потенциальной колумнарных энергий в окрестности вертикали, проходящей через гребень волны. Так, для $ak = 0.25$ колумнарная энергия в гребне превышает среднюю энергию волны в 2.5 раза, а для $ak = 0.42$ превышение составляет уже 12.6. По всей вероятности, этот механизм концентрации энергии лежит в основе так называемых волн-убийц (freak waves). Проблема волн-убийц детально обсуждается в публикациях [30]. Подробное численное моделирование волн-убийц проведено в [31—37].

Значение волн Стокса в теории поверхностных волн не исчерпывается их физической реальностью. Поскольку стационарные волны Стокса в движущейся системе координат являются точным решением полных уравнений, они могут служить очень удобным тестом для проверки нестационарных численных моделей. В таких расчетах стационарная волна задается в качестве начальных условий и далее прослеживается ее эволюция. Если волна Стокса устойчива, она должна перемещаться со своей фазовой скоростью, не видоизменяя свою форму. Известно, однако, что в присутствии даже очень малых возмущений волна Стокса трансформируется под действием неустойчивости Бенджамина—Фейера. Этот процесс выражается в экспоненциальном росте амплитуд мод расположенных между модами волны Стокса. Таким образом, такая проверка нестационарной модели не дает результата, поскольку решение непредсказуемо изменяется. Выход из этой ситуации, однако, очень прост: моды волны Стокса должна задаваться «плотно» на волновых числах $1, 2, 3, \dots$, так что в Фурье-пространстве не остается «свободного места», и новые моды развиваться не могут. Такие расчеты с моделями в конформных координатах проводились много раз, демонстрируя сохранение формы бегущей волны Стокса с точностью порядка 10^{-10} . Стационарность волны Стокса означает, что все составляющие ее моды перемещаются в пространстве строго с фазовой скоростью главной моды. При этом ограничения в аппроксимации волны Стокса модами с волновыми числами принадлежащему натуральному ряду никак не влияют на достоверность проверки модели, поскольку любая ошибка в выкладках, численной схеме и программных кодах ведет к немедленному распаду волны Стокса. Этот распад, прежде всего, выражается в утрате монотонности убывания спектра волны. Поэтому такая проверка решение является точной, полной и нетривиальной. Попытки моделирования крутой бегущей волны Стокса, проводившиеся до введения конформных переменных, успеха не имели.

Уравнение для стационарных волн и алгоритм решения. В основе теории стационарных волн лежат полные уравнения потенциальной динамики невязкой несжимаемой жидкости. Эти уравнения в наиболее удобном для расчетов виде даны в [19—21]. Здесь мы будем исходить из формулировки, данной в [21]. Стационарная версия полных уравнений в конформной, движущейся с неизвестной скоростью c , системе координат имеет вид [20]:

$$\frac{1}{2} c^2 J^{-1} + z - \sigma J^{-3/2} (-x_{\xi\xi} z_{\xi} + z_{\xi\xi} x_{\xi}) = \alpha, \quad (1)$$

где $\alpha = -\frac{d\Phi_0}{dt}$, и, поскольку левая часть (1) не зависит от времени, $\alpha = \text{const}$, причем значение α неизвестно. В уравнении (1) x и z — декартовы координаты поверхности $\zeta = 0$, ξ и ζ — конформные координаты,

$$J = x_\xi^2 + z_\xi^2 \quad (2)$$

— якобиан преобразования, σ — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения. Уравнение (1) и последующие уравнения представлены в безразмерной форме с масштабами, построенными на ускорении свободного падения g и произвольном масштабе длины. Решить уравнение (1) — означает найти коэффициенты Фурье в конформном преобразовании,

$$x(\xi, \zeta) = \xi + \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} \eta_{-k} \frac{\cosh k(\zeta + H + \eta_0)}{\cosh k(H + \eta_0)} \mathfrak{G}_k(\xi), \quad (3)$$

$$z(\xi, \zeta) = \zeta + \eta_0 \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} \eta_k \frac{\sinh k(\zeta + H + \eta_0)}{\sinh k(H + \eta_0)} \mathfrak{G}_k(\xi), \quad (4)$$

Здесь η_k — коэффициенты Фурье свободной поверхности η при $\zeta = 0$ в конформной системе координат

$$\eta(\xi, \zeta = 0) = \eta_0 + \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} \eta_k \mathfrak{G}_k(\xi).$$

В формулах (3) и (4) — базовые функции Фурье-разложения

$$\eta_k(\xi) = \begin{cases} \cos k\xi, & k \geq 0, \\ \sin k\xi, & k < 0, \end{cases}$$

M — максимальное волновое число, учитываемое в разложении, H — глубина.

В случае глубокой воды дробь в разложениях (3) и (4) заменяется на $e^{-k\zeta}$. По «горизонтальной» координате предполагается периодичность в периодом 2π . Формулы (3) и (4) при $\zeta = 0$ дают параметрическое представление поверхности волны Стокса.

Для нахождения константы η_0 воспользуемся условием сохранения массы

$$\int_0^{2\pi} h(x) dx = \int_0^{2\pi} z(\xi, \zeta = 0) x_\xi(\xi, \zeta = 0) d\xi = 0,$$

откуда с учетом (2) и (3) следует

$$\eta_0 = -\frac{1}{2} \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} k \coth(k(H + \eta_0)) \eta_k^k, \quad (5)$$

константа α и фазовая скорость в (1) также неизвестны, эти величины определяются в ходе решение уравнения.

Уравнение (1) решается численно с использованием Фурье-разложений (2) и (3) и выражениями для их производных:

$$x_\xi(\xi, \zeta) = 1 - \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} k \eta_{-k} \frac{\cosh k(\zeta + H + \eta_0)}{\sinh k(H + \eta_0)} \mathfrak{G}_k(\xi), \quad (6)$$

$$x_\zeta(\xi, \zeta) = \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} k \eta_{-k} \frac{\sinh k(\zeta + H + \eta_0)}{\sinh k(H + \eta_0)} \mathfrak{G}_k(\xi),$$

$$z_{\xi}(\xi, \zeta) = - \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} k \eta_{-k} \frac{\sinh k(\zeta + H + \eta_0)}{\sinh k(H + \eta_0)} \vartheta_k(\xi),$$

$$z_{\zeta}(\xi, \zeta) = 1 + \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} k \eta_{-k} \frac{\cosh k(\zeta + H + \eta_0)}{\sinh k(H + \eta_0)} \vartheta_k(\xi).$$

Нелинейные члены в (1) рассчитываются на сетке $\zeta_i = 2\pi(i-1)/N$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, где $N = 4M$ — число узлов. Используется Фурье-сеточный (Fourier-transform) метод, разработанный в [38, 39].

Заметим, что последний член в (1) имеет высший дифференциальный порядок, поэтому решение полного уравнения (1) не обязательно должно иметь правильную асимптотику при уменьшении поверхностного натяжения $\sigma \rightarrow 0$. Этот эффект рассмотрен в [20—21], где найдено, что алгоритмы расчета для гравитационно-капиллярных волн ($\sigma > 0$) и гравитационных волн ($\sigma = 0$) должны быть различными. Заметим, что стационарные гравитационно-капиллярные волны являются в некотором роде экзотикой, поэтому в настоящей работе рассматриваются только стационарные гравитационные волны, которые могут быть названы «волнами Стокса на мелкой воде».

Расчет волны Стокса на мелкой воде. Для случая бесконечной глубины решение для волн Стокса до пятого порядка включительно было получено самим Стоксом [10]. Используемая в настоящей работе итеративная процедура [16] может быть применена как для случаев бесконечной, так и конечной глубины. Уравнение (1) для случая чисто гравитационных волн может быть переписано в виде

$$\ln \frac{c^2}{2} - \ln(J) = \ln(\alpha - z). \quad (7)$$

Попытки прямого решения дифференциального уравнения (7) на основе итерационных методов не дали результата, так как приводили к расходимости. Поэтому была разработана схема, основанная на интегральном операторе. Изложение этого весьма сложного алгоритма, разработанного, в основном, Д. Шейниным, дано работе [22].

Введем комплексные переменные:

$$\rho = \xi + i\zeta, \quad r(\rho) = x(\xi, \zeta) + iz(x, z).$$

Уравнение (7) может быть переписано в виде двух уравнений:

$$\ln J = 2 \operatorname{Re}(w), \quad (8)$$

$$z_{\xi} = \operatorname{Im}(\exp w),$$

где $w = \ln \frac{dr}{d\rho}$. (9)

Таким образом, если Фурье коэффициенты f_k для $\ln J$ известны, коэффициенты g_k для $\exp w$ могут быть найдены с помощью преобразования Гильберта, которое определяется в Фурье-пространстве равенствами

$$f_k = g_{-k} \coth k\tilde{H}, \quad g_k = -f_k \tanh k\tilde{H},$$

($\tilde{H} = H + \eta_0$) после чего w и, следовательно, z_ξ может быть определено в сеточном пространстве с помощью обратного преобразования Фурье. Сама функция z определяется интегрированием по ξ с условием сохранения массы

$$\int_0^{2\pi} z x_\xi d\xi = 0.$$

В качестве характеристики амплитуды волны введем

$$s = \frac{1}{4} (\lg J(\xi = 0, \zeta = 0) - \lg J(\xi = \pi, \zeta = 0)) - \tanh \tilde{H}.$$

В линейном приближении s равна амплитуде моды с волновым числом $k = 1$.

Пусть $\chi^{[n]}$ обозначает значение переменной χ на n -ой итерации. Итерационная схема может быть записана в следующей последовательности (все переменные относятся к поверхности $\zeta = 0$, если не оговорено иное).

1) Положим $n = 0$ и $\ln J^{[0]} = 2s \coth H \cos \xi$ (это линейное решение), $\eta_0 = 0$ и $\tilde{H}^{[0]} = H$.

2) Применим преобразование Гильберта (9) к $\ln J^{[n]}$ (для текущего значения $\tilde{H}^{[n]}$) для определения w и (интегрированием $z_\xi^{[n]}$) поверхности $z^{[n]}$. Если $\max |z^{[n]} - z^{[n-1]}| < \varepsilon$ (ε — заданная точность для итерационного изменения z) итерации закончены. В противном случае переходим к этапу 3.

3) Рассчитываем среднее значение обратного якобиана $\overline{J^{-1}}$

$$\overline{J^{-1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J^{-1} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J^{-1} x_\xi d\xi. \quad (10)$$

Подынтегральная функция в (10) согласно (8) является действительной частью аналитической функции, следовательно, интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю, и, благодаря условию периодичности интеграл (10) является константой по глубине. Поскольку на дне $\zeta = -H$ справедливо условие $z_\xi = 0$, якобиан (2) принимает форму $J = x_\xi^2$, (10) может быть переписано в виде:

$$\overline{J^{-1}}^{[n]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{x_\xi(\xi, \zeta = -\tilde{H})}. \quad (11)$$

Из (6) следует, что

$$x_\xi(\xi, \zeta = -\tilde{H}) = 1 + \sum_{-M \leq k < M, k \neq 0} k \sinh^{-1}(k\tilde{H}) \eta_k \vartheta_k(\xi).$$

Интеграл (11) рассчитывается в Фурье-пространстве.

4) Согласно (5) рассчитывается следующее приближение для η_0 :

$$\eta_0^{[n+1]} = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq M} k \cosh(k(H + \eta_0^n)) (\eta_0^n)^2,$$

и следующее приближение для \tilde{H} : $\tilde{H}^{[n+1]} = \tilde{H} + \eta_0^{n+1}$.

5) Рассчитывается следующее приближение для константы a :

$$a^{[n+1]} = \frac{\exp(4s \coth \tilde{H}^{n+1}) z^{[n]}(\xi = 0) - z^{[n]}(\xi = \pi)}{\exp(4s \coth \tilde{H}^{n+1})}.$$

Из (1) при $\sigma = 0$ следует, что $\frac{1}{2}c^2 J^{-1} = a$, поэтому $\frac{1}{2}(c^{[n+1]})^2 = Ja^{[n+1]}$ и сеточные значения $\ln J$ рассчитываются по формуле

$$\ln J^{n+1} = -\ln \frac{a^{[n+1]} - z^{[n]}}{\frac{1}{2}(c^{[n+1]})^2}.$$

б) Находится Фурье-представление для $\ln J^{n+1}$, полагается $n = n + 1$, после чего происходит возврат к этапу 2, где анализируется точность.

По окончании итераций решение переносится из конформных координат в декартовы координаты с помощью периодической сплайн интерполяции.

Результаты расчетов. Целью настоящей работы является исследование стационарных волн Стокса на конечной глубине. Для сравнения на рис. 1 даны основные свойства волн Стокса для случая бесконечной глубины.

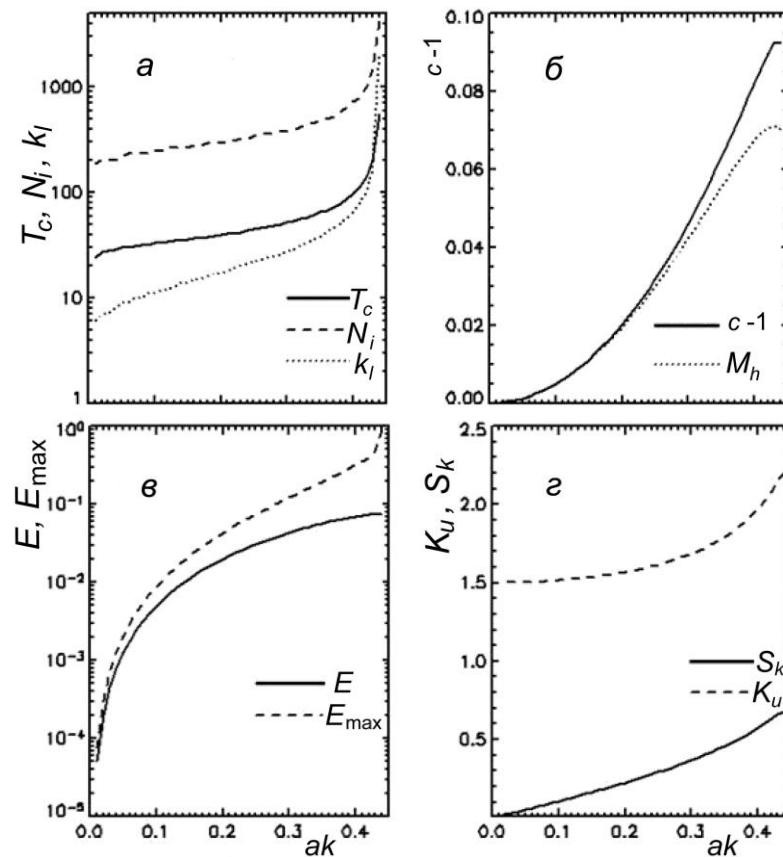


Рис. 1. Характеристики стационарного решения для волн Стокса на глубокой воде как функция крутизны $ak = (0.01 \div 0.44)$.
 а — T_c — время расчета в миллисекундах; N_i — число итераций, необходимых для достижения точности 10^{-11} ; k_i — число Фурье мод с амплитудой превышающей 10^{-11} ; б — $c - 1$ (c — фазовая скорость); M_h — суммарный горизонтальный импульс; в — $E = E_p + E_k$ — суммарная энергия (E_p — потенциальная энергия; E_k — кинетическая энергия); з — S_k — асимметрия; K_u — эксцесс.

Для расчета использовался в принципе тот же алгоритм, который описан выше. В случае глубокой воды параметр η_0 равен нулю, и поэтому этапы 3 и 4 пропускаются. Как видно, метод оказывается чрезвычайно экономичным: даже для волны Стокса с крутизной 0.43 время расчета составляет 1 с, несмотря на то, что число итераций N_i доходит до нескольких тысяч и число мод необходимых для достижения высокой точности возрастает до нескольких сотен. Заметим, что для численных экспериментов, предпринимаемых для проверки нестационарной численной модели, волна Стокса должна задаваться с очень высокой точностью, иначе она оказывается неустойчивой. Фазовая скорость C для волн Стокса значительно превосходит линейную фазовую скорость и достигает для предельно крутой волны значения $C = 1.09$. Суммарный горизонтальный импульс волны Стокса M_h

$$M_h = (2\pi) \int_0^{2\pi} \phi z_\xi d\xi,$$

потенциальная и кинетическая энергии E_p и E_k

$$E_p = (2\pi) \int_0^{2\pi} z^2 x_\xi d\xi, \quad E_k = (2\pi) \int_0^{2\pi} \phi \phi_\xi d\xi,$$

также увеличиваются с увеличением крутизны. Изменение формы волны хорошо характеризуются значениями асимметрии Sk и эксцесса Ku . Обе эти величины

$$Sk = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\eta_j - \bar{\eta}}{\sqrt{V}} \right)^3, \quad Ku = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\eta_j - \bar{\eta}}{\sqrt{V}} \right)^4,$$

где V — среднеквадратичное отклонение для уровня η . Для линейных волн $Sk = 0$ и $Ku = 1.5$.

Задача для волн Стокса на конечной глубине, сформулированная в предыдущей секции, решалась Фурье-сеточным методом с числом мод $M = 1000$ и числом узлов $N = 4000$.

Расчет волн Стокса для конечной глубины проводился в диапазоне крутизны $0 < ak \leq 0.43$ и глубины $0 < d \leq 2\pi$.

Заметим, что фазовая скорость линейной волны ($ak \rightarrow 0$) равна 1. Нижняя линия на рис. 2 и последующих рисунках ограничивает область существования решения, полученного данным алгоритмом. Можно предположить, что волны Стокса в этой области не существуют. Отсутствие решения подтверждается тем, что с приближением к области неустойчивости очень быстро растет вторая производная на гребне волны, т. е. нарушается монотонность первой производной. Для волн Стокса на глубокой воде заострение волны происходит при $ak = 0.443$, однако этот эффект имеет место для любой глубины при меньшей крутизне волны.

В верхней части волны Стокса существуют, и они, по-видимому, неустойчивы к возмущениям, как и волны Стокса на глубокой воде. Линия, отделяющая область существования решения, может быть аппроксимирована формулой

$$d = \frac{0.042 + 1.37ak - 3.79(ak)^2 + 3.82(ak)^3}{0.52 - ak}, \quad (12)$$

применимой на интервале $0.01 < ak < 0.44$.

Как видно, для глубины $d > \pi$ решение для волн Стокса почти не отличается от решения для глубокой воды: фазовая скорость c по мере увеличения крутизны увеличива-

ется от 1 линейной волны до 1.0922 для крутизны $ak = 0.443$. С уменьшением глубины картина резко меняется: фазовая скорость начинает уменьшаться вместе с сокращением области существования решения (рис. 2, б). Наименьшая фазовая скорость $c = 0.0412$ была получена при $ak = 0.0001$ и $d = 0.0015$. По-видимому, фазовая скорость стремится к 0 одновременно с d и ak . Эта гипотетическая асимптотика не выдержана точно в аппроксимации (12) во избежание чрезмерных усложнений формулы.

На рис. 3 показана вертикальная асимметрия поверхности z волны Стокса, рассчитываемая по формуле

$$Sk = \frac{\overline{(z - \bar{z})^3}}{\left(\overline{(z - \bar{z})^2}\right)^{3/2}},$$

где \bar{z} — положение невозмущенного уровня. Величина Sk , грубо говоря, показывает асимметрию распределения вероятности возвышения с преобладанием меньших значений переменной. В данном случае положительная асимметрия показывает, что волна заострена, а подошва более пологая и неглубокая. Как видно асимметрия быстро растет с уменьшением глубины. Для волны с указанной выше фазовой скоростью $c = 0.0412$ асимметрия достигла значения $Sk = 25.48$. Для предельной волны Стокса на глубокой воде с крутизной $ak = 0.443$ асимметрия равна 510.45.

По-видимому, с уменьшением глубины и крутизны волны асимметрия волны стремится к бесконечности.

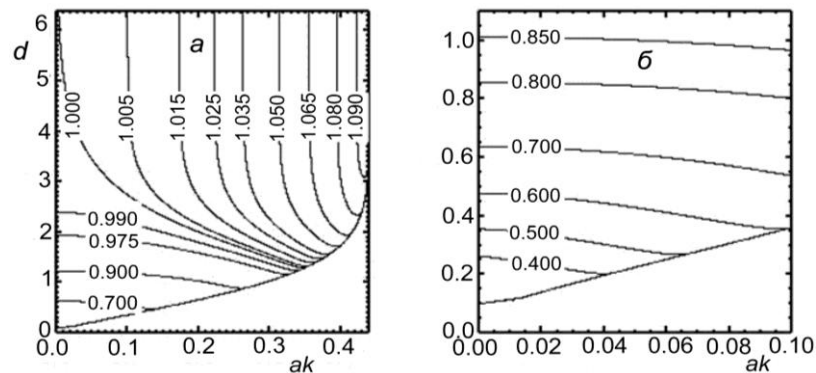


Рис. 2 Фазовая скорость волны Стокса как функция глубины d и крутизны ak .
 а — в диапазоне $ak(0, 0.4)$, $d(0, 2\pi)$; б — в диапазоне $ak(0, 0.1)$, $d(0, 1.2)$.

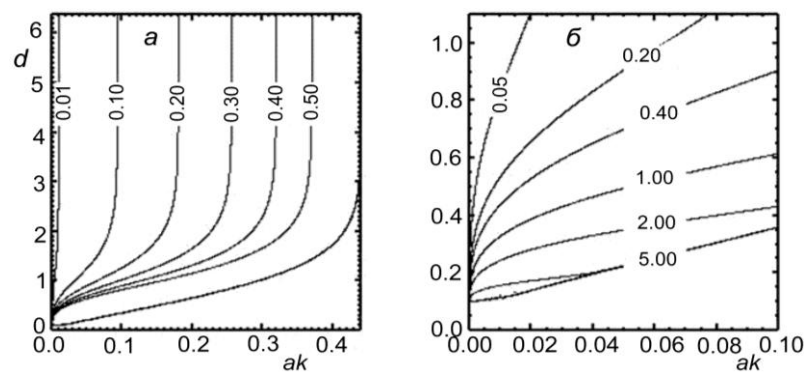


Рис. 3. Вертикальная асимметрия волны Стокса Sk как функция глубины d и крутизны ak .
 а — в диапазоне $ak(0, 0.4)$, $d(0, 2\pi)$; б — в диапазоне $ak(0, 0.1)$, $d(0, 1.2)$.

Эффект асимметрии волны отчетливо иллюстрируется на рис. 4, где представлено отношение высоты волны H_c в гребне к глубине подошвы H_t . Для гармонической волны это отношение равно 1, а для предельно крутой волны Стокса на глубокой воде оно равно 2.056.

При одновременном уменьшении глубины и амплитуды, величина H_c / H_t возрастает. Например, для $ak = 0.0001$ и $d = 0.0015$ $H_c / H_t = 633.18$. По-видимому, эта характеристика стремится к бесконечности, так что говорить о ее предельном значении невозможно.

На рис. 5 представлена максимальная крутизна волны $\max(\partial\eta/\partial x)$. В поведении этой характеристики нет особых неожиданностей: крутизна возрастает с увеличением глубины и ростом общей крутизны ak . Максимальное значением $\max(\partial\eta/\partial x) = 1.971$ приходится на $ak = 0.443$ для глубокой воды.

Поведение второй производной $\partial^2\eta/\partial x^2$, характеризующей заостренность волны (рис. 6), более сложно. По абсолютным значениям отрицательная кривизна в пике волны во много раз превосходит положительную кривизну в подошве волны. Так, при $ak = 0.0001$ и $d = 0.0002$ величина $\partial^2\eta/\partial x^2$ имеет экстремумы -20.1 и 6.1 ; при $ak = 0.44$ и $d = 2\pi$ — экстремумы -287.5 и 0.3 . С приближением к линии, разделяющей устойчивую и неустойчивую области (12) кривизна стремится к $-\infty$, что, собственно, и является причиной гидродинамической и вычислительной неустойчивости.

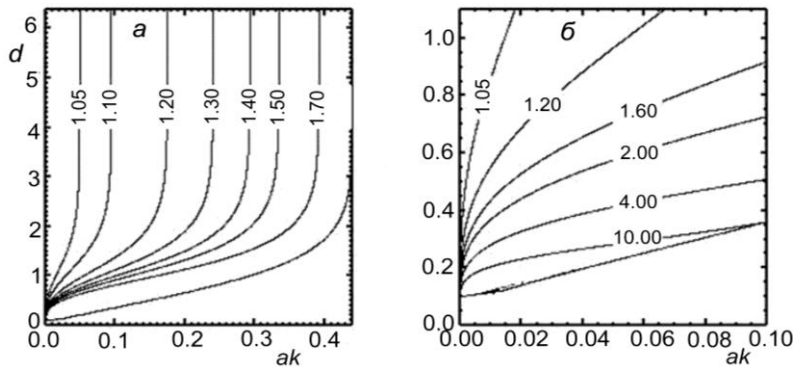


Рис. 4. Отношение высоты волны H_c в гребне к глубине подошвы H_t как функция глубины d и крутизны ak .
 а — в диапазоне $ak(0, 0.4)$, $d(0, 2\pi)$; б — в диапазоне $ak(0, 0.1)$, $d(0, 1.2)$.

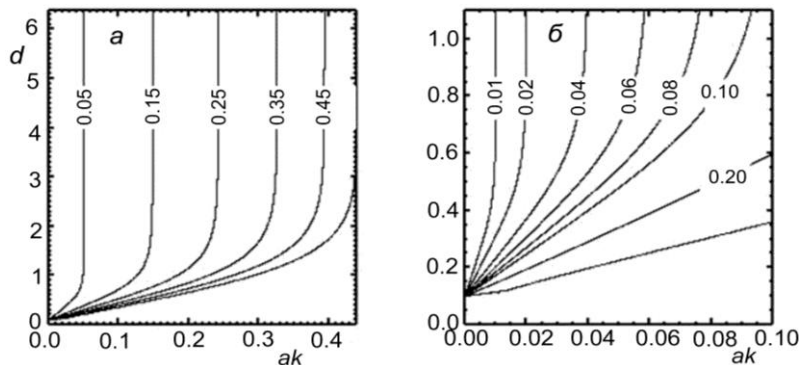


Рис. 5. Максимальна крутизна как функция глубины d и крутизны ak .
 а — в диапазоне $ak(0, 0.4)$, $d(0, 2\pi)$; б — в диапазоне $ak(0, 0.1)$, $d(0, 1.2)$.

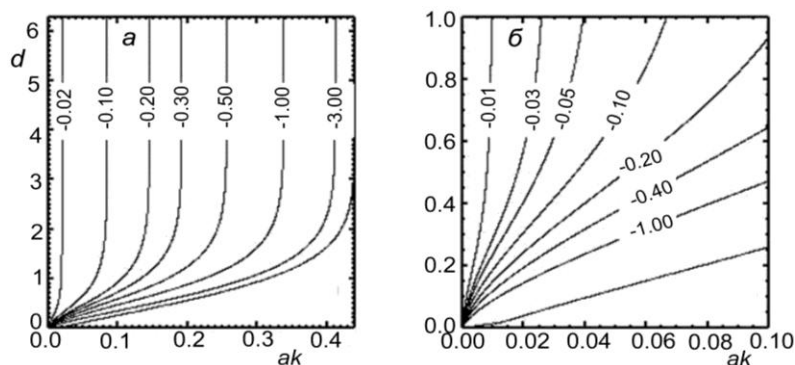


Рис. 6. Вторая производная поверхности $\partial^2\eta/\partial x^2$ в пике волны, как функция глубины d и крутизны ak . a — в диапазоне $ak(0, 0.4)$, $d(0, 2\pi)$; b — в диапазоне $ak(0, 0.1)$, $d(0, 1.2)$.

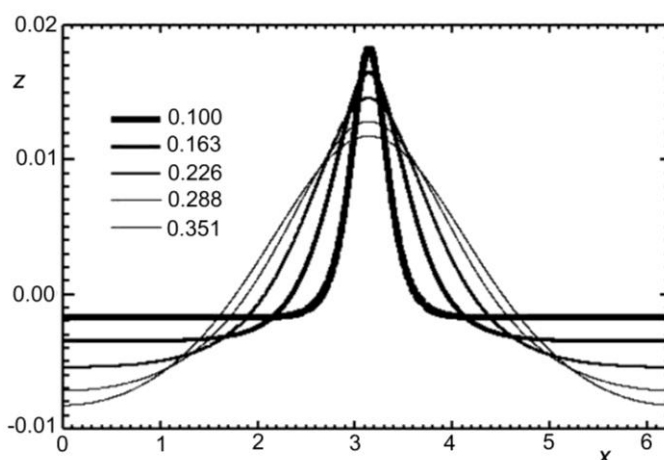


Рис. 7. Профиль волны на разных глубинах d (указанных в легенде) для крутизны $ak = 0.01$.

Изменение профиля волны с уменьшением глубины показано на рис. 7. Результаты относятся к одной и той же крутизне волны $ak = 0.01$. Как видно, по мере уменьшения глубины протяженность положительной области сокращается и волна обращается в δ -образную периодическую функцию. Фазовая скорость волны с крутизной $ak = 0.01$ на глубине $d = 0.1$ равна 0.338.

В настоящей работе полные потенциальные уравнения со свободной поверхностью и конформное преобразование использовались для исследования свойств волны Стокса на конечной глубине. Описан алгоритм очень быстрого и точного решения. Исследованы основные геометрические характеристики волны и найдена область существования решения. На линии, ограничивающей область существования решения, отрицательная крутизна поверхности стремится к $-\infty$. Существование решения ничего не говорит об устойчивости. Известно, однако, что волна Стокса на глубокой воде неустойчива к возмущениям — развивается неустойчивость Бенджамина—Фейера. Надо полагать, что это свойство присуще и волнам Стокса на конечной глубине. Этот вопрос, однако, пока не исследован.

Авторы благодарят анонимного рецензента за ряд полезных замечаний. Работа была поддержана грантом РФФИ 11-05-0052-а.

Литература

1. *Stokes G. G.* On the theory of oscillatory waves // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1847. V. 8. P. 441—445.
2. *Crapper G. D.* An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 96. P. 417—445.
3. *Clamond D., Grue J.* A fast method for fully nonlinear water wave dynamics // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 447. P. 337—355.
4. *Grilli S., Guyenne P., Dias F.* A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom // *Int. J. Num. Methods Fluids.* 2001. V. 35. P. 829—867.
5. *Clamond D., Fructus D., Grue J., Krisitiansen O.* An efficient method for three-dimensional surface wave simulations. Part II: Generation and absorption // *Journ. Comp. Physics.* 2005. V. 205. P. 686—705.
6. *Fochesato C., Dias F., Grill S.* Wave energy focusing in a three-dimensional numerical wave tank // *Proc. R. Soc.* 2006. V. 462, N 2066. P. 2715—2735.
7. *Zakharov V. E.* Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1968. V. 9. P. 190—194.
8. *Dommermuth D., Yue D.* A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 184. P. 267—288.
9. *West B., Brueckner K., Janda R., Milder M., Milton R.* A New Numerical Method for Surface Hydrodynamics // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. P. 11803—11824.
10. *Tanaka M.* A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation // *Fluid Dyn. Res.* 2001. V. 28. P. 41—60.
11. *Tanaka M.* Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 444. P. 199—221.
12. *Ducrozet G., Bonnefoy F., LeTouze D., Ferrant P.* 3-DHOS simulations of extreme waves in open seas // *Nat. Hazards Earth System Sci.* 2007. V. 7. P. 109—122.
13. *Whitney J. C.* The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // *Proc. Second Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics.* Springer-Verlag, 1971. P. 458—462.
14. Овсянников Л. В. Плоская задача о неустановившемся движении жидкости со свободными границами // *Динамика сплошной среды.* 1971. 8. С. 22—26.
15. *Kano T., Nishida T.* Sur le ondes de surface de l'eau avec une justification mathematique des equations des ondes en eau peu profonde // *J. Math, Kyoto Univ.* 1979. V. 19, N 2. P. 335—370.
16. *Fornberg B.* A numerical method for conformal mapping // *SIAM, J. Sci. Comput.* 1980. V. 1, N 3. P. 386—400.
17. *Tanveer S.* Singularities in water waves and Rayleigh-Taylor instability // *Proc. R. Soc.* 1991. V. 435, N 1893. P. 137—158.
18. *Maklakov D. V.* Almost-highest gravity waves on water of finite depth // *Eur. J. Appl. Math.* 2002. 13. 67.
19. *Chalikov D., Sheinin D.* Numerical modeling of surface waves based on principal equations of potential wave dynamics // *Technical Note. NOAA/NCEP/OMB:* 1996. 54 p.
20. *Chalikov D., Sheinin D.* Direct Modeling of One-dimensional Nonlinear Potential Waves // *Advances in Fluid Mechanics.* 1998. V. 17. P. 207—258.
21. *Chalikov D., Sheinin D.* Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // *Journ. Comp. Phys.* 2005. V. 210. P. 247—273.
22. Шейнин Д. А., Чаликов Д. В. Гидродинамическое моделирование потенциальных поверхностных волн // *Труды международной теоретической конференции. «Проблемы гидрометеорологии и окружающей среды на пороге XXI века».* Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 2000. С. 305—337.
23. *Chalikov D.* Statistical properties of nonlinear one-dimensional wave fields // *Nonlinear processes in geophysics.* 2005. V. 12. P. 1—19.
24. *Чаликов Д. В.* Трансформация гармонических волн на глубокой воде // *Фундаментальная и прикладная геофизика.* 2010. Т. 9, № 3. С. 14—21.
25. *Drennan W. M., Hui W. H., Tenti G.* Accurate calculation of Stokes wave near breaking // *C. Graham, S. K. Malik. Continuum Mechanics and its Applications.* Washington DC: Hemisphere Publishing, 1988. P. 463—473.
26. *Longuet-Higgins M. S., Tanaka M.* On the crest instabilities of steep surface waves // *J Fluid. Mech.* 1997. V. 336. P. 51—68.
27. *Longuet-Higgins M. S.* The Instabilities of Gravity Waves of Finite Amplitude in Deep Water. II Subharmonics // *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1978. V. 360. P. 489—505.
28. *Benjamin T. B., Feir J. E.* The Disintegration of Wave Trains in Deep Water // *J. Fluid. Mech.* 1967. V. 27. P. 417—430.
29. *Chalikov D.* Simulation of Benjamin-Feir instability and its consequences // *Phys of Fluid.* 2009. V. 19. 016602-15. doi: 10.1063/1.2432303.

30. Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Нижний Новгород: ННГУ, 2004. 157 с.
31. Chalikov D. Freak waves: their occurrence and probability // *Phys of Fluid*. 2009. V. 21, 076602-18. doi: 10.1063/1.3175713.
32. Чаликов Д. В. Статистика экстремальных ветровых волн // *Фундаментальная и прикладная геофизика*. 2009. Т. 5, № 3. С. 4—24.
33. Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2002. V. 21. P. 283—291.
34. Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Prokofiev A. O. Freak waves as nonlinear stage of Stokes wave modulation instability // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2006. V. 25, P. 677—692.
35. Dyachenko A. I., Zakharov V. E. Modulation instability of Stokes wave – freak wave // *JETP Letters*. 2005. V. 81. P. 255—259.
36. Dyachenko A. I., Zakharov V. E. On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // *JETP Lett*. 2008. V. 88. P. 307—311.
37. Шамин Р. В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // *Доклады Академии наук*. 2006. Т. 406, № 5. С. 112—113.
38. Orszag S. A. Transform method for calculation of vector coupled sums. Application to the spectral form of vorticity equation // *J. Atmos. Sci*. 1970. V. 27. P. 890—895.
39. Prosperetti A., Jacobs J. W. A numerical method for potential flow with a free surface // *J. Comput. Phys*. 1983. № 51. С. 365—386.

Статья поступила в редакцию 01.11.2012 г.



D. V. Chalikov, K. Yu. Bulgakov

Saint-Petersburg Department of the P. P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Saint-Petersburg, Russia
dmitry-chalikov@yandex.ru

STOKES WAVES AT FINITE DEPTH

The main properties of the Stokes waves are considered. Several methods of numerical investigation of wave dynamics are discussed. A conformal surface-following coordinate system is defined. Stationary potential waves equation in this coordinate system are represented. Algorithm of very fast numerical solving of stationary one-dimensional potential equations for the case of optional depth is described. The characteristics of numerical runs for the deep depth case are investigated: time of experiments, iteration number, potential, kinetic and total energy, asymmetry, excess. Area in coordinates of depth and steepness where solution exists is specified. The geometrical characteristics of the Stokes waves as function of steepness and depth are investigated: asymmetry, maximum of the local steepness, maximum of the local second derivate and also phase velocity. The forms of waves for steepness 0.01 are shown. Possible application of obtained results is considered.

Key words: Stokes waves at finite depth, conformal mapping, numerical solution, area of instability.