

УДК 681.88

© Г. Б. Сидельников, Г. С. Малышкин

ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург  
glebios@mail.ru

## ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ОДНОГО ИЗ СЕМЕЙСТВА БЫСТРЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ

Задача обнаружения в пассивной локации является одной из самых популярных во всей гидроакустике и при этом она остается одной из самых мало освещенных. Достаточно большое внимание с начала семидесятых годов уделялось адаптивным алгоритмам обнаружения, однако ввиду больших сложностей с их внедрением в гидроакустические комплексы, интерес со временем ослаб. К тому же для адаптивных алгоритмов в пассивной локации редко выводятся количественные вероятностные характеристики применительно к сложным тактическим обстановкам, что заметно усложняет решение задачи обнаружения с их помощью. При современных представлениях о динамике распространения звукового сигнала в водной среде, а именно присутствие эффектов многолучевого распространения и рассеяния, основной интерес вызывают алгоритмы, работающие по короткой выборке для адаптации. В статье выводятся приближенные формулы для первых двух моментов одного из перспективных быстрых проекционных алгоритмов обнаружения, построенного на короткой выборке по элементам антенной решетки. Приводятся результаты модельного исследования полученных зависимостей для антенных решеток различных конфигураций. Делается сравнение результатов по выходному отношению сигнал/помеха по слабым сигналам с классическим неадаптивным алгоритмом Барлетта. Предлагается метод устранения потери по обнаружению слабых источников путем использования спектрального разложения матрицы, участвующей при построении ортогонального проектора.

**Ключевые слова:** проекционный алгоритм, адаптация, приближенные выражения.

*G. B. Sidelnikov, G. S. Malyshkin*JSC «Concern «CSRI Elektropribor», Saint-Petersburg, Russia  
glebios@mail.ru

## ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF THE FIRST TWO STATISTICAL MOMENTS OF SOME PROJECTION TYPE ALGORITHM

The problem of detection in passive sonar is one of the most popular in all underwater acoustics field and it remains the one of the most sparse. Since the early seventies adaptive algorithms received an attention, but due to great difficulties in their implementation in the modern sonar systems, interest has weakened over time. In addition to adaptive algorithms in passive sonar rarely appear quantitative probabilistic characteristics for complex tactical environment, which significantly complicates the solution of the detection problem using them. With the current understanding of the sound propagation dynamics in the water environment, namely the presence of the effects of multipath propagation and scattering, the algorithms working on the short sample for adaptation become the main interest. In this article we derive approximations for the first two moments of the most promising fast projection type algorithms, which is built on a short sample of the antenna array elements. The results of modeling represented as the dependences for different configurations of antenna arrays. A comparison of the results from the output signal to noise ratio on weak signals with a classic non-adaptive algorithm Bartlett was presented. We propose a method to eliminate the loss of weak sources detection by using the spectral decomposition of the matrix involved in the construction of the orthogonal projector.

**Key words:** Projection type algorithm, adaptation, asymptotic approximation.

В современной гидроакустике важную роль играет задача обнаружения целей в сложных условиях наличия таких факторов, как рассеяние и многолучевое распространение. С подобной априорной неизвестностью условий среды помогают справиться адаптивные алгоритмы [1–3]. Для многих алгоритмов, обладающих свойством сверхразрешения, были выведены плотности вероятности [4], что позволяет производить аналитическую оценку вероятности обнаружения и тем самым решать задачу обнаружения в постановке байесовского подхода. Помимо классических сверхразрешающих алгоритмов, таких как алгоритм Кейпона, MUSIC и др., в последнее время большой популярностью пользуются так называемые быстрые проекционные алгоритмы, построенные на базе ортогонального проектора [5]. С помощью этих алгоритмов можно успешно бороться с фактором рассеяния на коротких временных выборках и в узких частотных полосах, что оказывается сложно реализуемым для многих других алгоритмов, имеющих дело с обращением или спектральным разложением оценки корреляционной матрицы большого размера. Аналитический расчет вероятностных характеристик для данного семейства алгоритмов позволит решать задачу обнаружения с использованием индикаторного отношения сигнал/помеха (иОСП), являющегося часто применяемой на практике величиной вместо отношения правдоподобия.

В статье производится расчет приближенных выражений для математического ожидания и дисперсии выходного эффекта одного из семейства быстрых проекционных алгоритмов в различных помеховых ситуациях, а также параметрах самого алгоритма и приемной антенной решетки. Представлены результаты моделирования на линейной эквидистантной антенне и предложен подход к выставлению порогов обнаружения иОСП для фиксированных параметров гидроакустического тракта обнаружения.

**Постановка задачи.** Пусть имеется антенная решетка с  $L$  чувствительными элементами. Будем для простоты рассматривать узкополосный случай, тогда на каждом элементе  $l$  мы имеем комплексное значение спектрального отсчета  $x_l^t$  на различных интервалах  $t$  спектрального анализа. Отсчеты принимаются гауссовыми, центрированными случайными величинами, не коррелирующими на разных интервалах  $t$ . Из этих отсчетов формируем входную выборку вида:  $\mathbf{X} = \{x_l^t\}_L^K$ , где число столбцов  $K$  назовем размером обучающей выборки. Столбцы этой матрицы представимы в виде смеси сигнальной компоненты и помеховой:

$$\mathbf{x}_t = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \mathbf{V}_m + n_t \mathbf{N}_t, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_t = (x_1^t \ \dots \ x_L^t)^T$ ;  $\alpha_{m,t}$  — амплитуда  $m$ -го источника на  $t$ -ом такте;  $M$  — число источников излучения (либо различных лучей одного источника);  $\mathbf{V}_m$  — фазирующий вектор  $m$ -го источника, длиной  $L$ ;  $\mathbf{N}_t$  — вектор помехи, каждый элемент которого представляет собой случайную несмещенную независимую величину с единичной дисперсией;  $n_t$  — квадратный корень из мощности помехи на элементе антенной решетки.

Из выборки  $\mathbf{X}$  строится ортогональный проектор на сигнальное подпространство:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^H. \quad (2)$$

Ортогональный проектор представляет собой эрмитову матрицу размерности  $L$ , ранга  $K$ , обладающей следующим свойством:  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ . Выходной эффект исследуемого алгоритма обнаружения можно записать в следующем виде:

$$S_j = \mathbf{V}_j^H \mathbf{P} \mathbf{V}_j, \quad (3)$$

где  $\mathbf{V}_j$  — фазирующий вектор размерности  $L$ , ориентированный по направлению  $j$ . В литературе фигурирует другое представление выхода проекционного алгоритма, сводящееся в итоге к настоящему:

$$S1_j = \frac{1}{\mathbf{V}_j^H (\mathbf{I}_L - \mathbf{P}) \mathbf{V}_j} = \frac{1}{L - S_j}; \quad (4)$$

здесь  $\mathbf{I}_L$  — единичная матрица размерности  $L$ . Выражение (4) напрямую неудобно для анализа, поэтому проводить его будем с выходным эффектом (3). Обобщение результата на случай алгоритма (4) производится достаточно просто с использованием первого и второго статистического момента выражения (3).

**Оценка помеховых характеристик.** Рассмотрим подробнее преобразования матричных элементов при построении проектора:

$$\mathbf{X}^H \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_L^{1,H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{K,H} & \dots & x_L^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L^1 & \dots & x_L^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^L (x_i^1)^2 & \dots & \sum_{i=1}^L x_i^{1,H} \cdot x_i^K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^L x_i^{K,H} \cdot x_i^1 & \dots & \sum_{i=1}^L (x_i^K)^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В первую очередь, необходимо установить, какой уровень пространственных флюктуаций будет обеспечивать алгоритм, для этого в выражении (1) положим все  $\alpha_{m,t}$  равными нулю, т. е. рассмотрим случай чистых помех. Математическое ожидание (5) получается следующим:

$$E(\mathbf{X}^H \mathbf{X}) \approx \begin{pmatrix} n^2 L & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n^2 L \end{pmatrix} = n^2 L \cdot \mathbf{I}_K,$$

где  $E$  — знак математического ожидания,  $\mathbf{I}_K$  — единичная матрица размерности  $K$ .

Принимая во внимание тот факт, что  $L \gg 1$ , будем считать, что  $\mathbf{X}^H \mathbf{X} \approx E(\mathbf{X}^H \mathbf{X})$ . Тогда математическое ожидание (3) окажется следующим:

$$E(\mathbf{V}_j^H \mathbf{P} \mathbf{V}_j) = \frac{1}{L \cdot n^2} \mathbf{V}_j^H E(\mathbf{X} \mathbf{X}^H) \mathbf{V}_j = K. \quad (6)$$

Формула (6) с очень высокой точностью согласуется с результатами модельного расчета. Некоторую сложность вызывает подсчет дисперсии соответствующей величины. Соответствующая оценка в нулевом приближении запишется как:

$$D(\mathbf{V}^H \mathbf{P} \mathbf{V}) = E([\mathbf{V}^H \mathbf{P} \mathbf{V}]^2) - K^2 \approx K, \quad (7)$$

где  $D$  — знак дисперсии.

Результат (7) ведет себя как и математическое ожидание, в то время как реальная дисперсия описывается подобранной формулой:

$$D(\mathbf{V}^H \mathbf{P} \mathbf{V}) \approx K - \frac{K^2}{L}.$$

Логика подбора следующая, при  $K \rightarrow L$  значение дисперсии должно стремиться к нулю, так как проектор вырождается до единичной матрицы, при маленьких значениях  $K$  результаты формул практически совпадают, следовательно, можно использовать ее как первое приближение и ограничиться вторым коэффициентом разложения в ряд Тейлора по степеням  $K$  с дополнительным условием  $D|_{K=L} = 0$ . Формула оказывается очень точной, в широком интересующем нас диапазоне параметров она обеспечивает точность порядка 1 % (рис. 1).

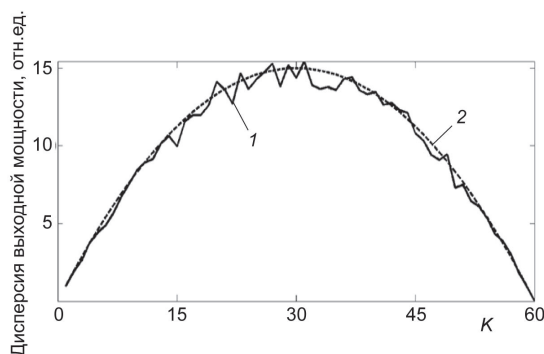


Рис. 1. Зависимость дисперсии выходного эффекта в случае присутствия чистых помех от размерности обучающей выборки. 1 — результат моделирования, 2 — по формуле (8). Число элементов  $L = 60$ ; число выборок усреднения  $T = 1000$ ; дисперсия помехи 1.

**Оценка сигнальных характеристик.** Так как в общем случае присутствия нескольких полезных сигналов статистический анализ выражения  $S = \mathbf{V}^H \mathbf{P} \mathbf{V}$  является довольно сложным, рассмотрим по порядку некоторые простые случаи.

Один полезный сигнал при  $K = 1$ . В данном случае выражение для ортогонального проектора можно заметно упростить:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^H = \frac{\mathbf{X}\mathbf{X}^H}{\mathbf{X}^H \mathbf{X}} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H,$$

где  $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{X}^H \mathbf{X}}}$ ,  $\mathbf{Z}^H \mathbf{Z} = 1$ . То есть, другими словами, производится нормирование исходной выборки. Рассмотрим модель одного сигнала мощности  $\overline{\alpha^2}$ :

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{V} + n \mathbf{N},$$

где  $\mathbf{V}$  — фазирующий вектор сигнала,  $\|\mathbf{V}\|^2 = L$ ,  $\alpha = N(0, \overline{\alpha^2})$ ,  $\mathbf{N}$  — нормальное распределение,  $\mathbf{N}$  — вектор шума,  $n^2$  — мощность шума.

Выражение для ортогонального проектора в данном случае примет следующий вид:

$$\mathbf{P} = \frac{|\alpha|^2 \mathbf{R}_V + n^2 \hat{\mathbf{R}}_N + n(\alpha \mathbf{V} \mathbf{N}^H + \alpha^H \mathbf{N} \mathbf{V}^H)}{\left( |\alpha|^2 + n^2 \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{L} \right) L + n(\alpha^H \mathbf{V}^H \mathbf{N} + \alpha \mathbf{N}^H \mathbf{V})}.$$

Здесь  $\hat{\mathbf{R}}_N = \mathbf{N} \mathbf{N}^H$  — корреляционная матрица независимых помех,  $E(\hat{\mathbf{R}}_N) = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R}_V = \mathbf{V} \mathbf{V}^H$ .

Введем следующее обозначение:  $r = (\mathbf{V}_0^H \cdot \mathbf{V})$ , для некоторого произвольного вектора наблюдения  $\mathbf{V}_0$ , тогда выражение для выходного эффекта становится равным

$$\mathbf{V}_0^H \mathbf{P} \mathbf{V}_0 = \frac{\left( |\alpha|^2 |r|^2 + n^2 \mathbf{V}_0^H \hat{\mathbf{R}}_N \mathbf{V}_0 \right) + n(\alpha^H r^H \mathbf{V}_0^H \mathbf{N} + \alpha r \mathbf{N}^H \mathbf{V}_0)}{\left( |\alpha|^2 + n^2 \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{L} \right) L + n(\alpha^H \mathbf{V}^H \mathbf{N} + \alpha \mathbf{N}^H \mathbf{V})}. \quad (8)$$

Полученное выражение уже оказывается довольно трудным для точного анализа. Выведем приближенное выражение для искомого математического ожидания выходного эффекта. Представим выражение (8) в виде:

$$\mathbf{V}_0^H \mathbf{P} \mathbf{V}_0 = \frac{A}{B} = \frac{\bar{A} + \delta A}{\bar{B} + \delta B}, \quad (9)$$

где  $A = |\alpha|^2 |r|^2 + n^2 \mathbf{V}_0^H \hat{\mathbf{R}}_N \mathbf{V}_0 + n(\alpha^H r^H \mathbf{V}_0^H \mathbf{N} + \alpha r \mathbf{N}^H \mathbf{V}_0)$ ;

$$B = \left( |\alpha|^2 + n^2 \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{L} \right) L + n(\alpha^H \mathbf{V}^H \mathbf{N} + \alpha \mathbf{N}^H \mathbf{V}); \quad \bar{A} = E(A), \bar{B} = E(B).$$

Приведем выражение (9) к более удобному виду:

$$\mathbf{V}_0^H \mathbf{P} \mathbf{V}_0 = \frac{\bar{A} + \delta A}{\bar{B}} \frac{\bar{B}}{\bar{B} + \delta B}.$$

Далее, используя разложение в ряд по  $\delta B$ , как по малому параметру, до первого члена получим:

$$\frac{\bar{B}}{\bar{B} + \delta B} = 1 - \delta B \frac{1}{\bar{B}} + o(\delta B)^2.$$

где  $o(\cdot)$  - член большего порядка малости. Тогда выражение для выходного эффекта в первом приближении принимает вид:

$$\mathbf{V}_0^H \mathbf{P} \mathbf{V}_0 \approx \frac{\bar{A} + \delta A}{\bar{B}} - \frac{\delta B \bar{A} + \delta B \delta A}{\bar{B}^2} + o(\delta B)^2.$$

Путем серии несложных выкладок можно убедиться, что математическое ожидание  $\delta A \delta B$  в диапазоне слабых сигналов, а также в направлениях близких к направлениям на источники сигналов, много меньше  $\bar{B}^2$ , что позволяет пренебречь вторым членом и прийти к упрощенной формуле расчета математического ожидания по помеховой компоненте:

$$E_N(\mathbf{V}_0^H \mathbf{P} \mathbf{V}_0) \approx \frac{[|\alpha|^2 |r|^2 + n^2 L]}{(|\alpha|^2 + n^2) L}.$$

здесь  $E_N$  — математическое ожидание по шумовой компоненте.

Описанные выше выражения являются приближенными, так как числитель и знаменатель в общем случае имеют некоторую взаимную корреляцию, однако она, как показывает моделирование, невелика, поэтому усреднение по помехам ведется непосредственно числителя и знаменателя отдельно.

Производить усреднение по амплитудам сигнала довольно просто, принимая во внимание тот факт, что имеет распределение Релея. В этом случае результат можно записать через табличную функцию — экспоненциальный интеграл:

$$E_\alpha \left( \frac{|\alpha|^2 |r|^2 + n^2 L}{|\alpha|^2 L + n^2 L} \right) = \frac{|r|^2}{L} + \frac{n^2}{\alpha^2} \left( \frac{L - r^2}{L} \right) e^{\frac{n^2}{\alpha^2}} \int_{\frac{n^2}{\alpha^2}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz.$$

Следующим важным пунктом является вычисление дисперсии. Возьмем вариацию от правой и левой частей выражения (9):

$$\delta(\mathbf{V}_0^H \mathbf{P} \mathbf{V}_0) = \delta \left( \frac{A}{B} \right) = \frac{\delta(A)}{B} - \frac{A \delta(B)}{B^2} = \frac{A}{B} \left( \frac{\delta(A)}{A} - \frac{\delta(B)}{B} \right).$$

Усредненный квадрат флуктуации равен дисперсии соответствующего выражения, получаем:

$$D(\mathbf{V}_0^H \mathbf{P} \mathbf{V}_0) \approx \left( \frac{A}{B} \right)^2 \left( \frac{D(A)}{A^2} + \frac{D(B)}{B^2} - \frac{2E(\delta A \cdot \delta B)}{AB} \right). \quad (10)$$

Расчет всех необходимых значений в формуле (10) несложный, но довольно громоздкий, поэтому вывод приводиться не будет, результат представлен на рис. 2. Приближенное выражение для дисперсии имеет вид:

$$D(\mathbf{V}_0^H \mathbf{P} \mathbf{V}_0) \approx \frac{\overline{\alpha^2}^2 |r|^4 + 4\overline{\alpha^2} n^2 L |r|^2 + 2n^4 L^2}{(\overline{\alpha^2} + n^2)^2 L^2} \left[ \frac{2\overline{\alpha^2} n^2 L |r|^2 + n^4 L^2}{\overline{\alpha^2}^2 |r|^4 + 4\overline{\alpha^2} n^2 L |r|^2 + 2n^4 L^2} + \frac{n^4 L + 2\overline{\alpha^2} n^2 L}{\overline{\alpha^2}^2 L^2 + n^4 L(L+1) + 2\overline{\alpha^2} L^2 n^2 + 2\overline{\alpha^2} n^2 L} - 2 \frac{n^4 L + 2\overline{\alpha^2} n^2 |r|^2}{L \overline{\alpha^2}^2 |r|^2 + \overline{\alpha^2} n^2 |r|^2 (L+2) + n^4 L(L+1) + \overline{\alpha^2} n^2 L^2} \right].$$

*Обобщение на случай большей размерности обучающей выборки.* Отметим, что и при произвольном размере ортогонального проектора, его выходной эффект также нормирован, согласно соотношению [5]:

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{V}_j^{*T} \left[ \sum_{k=1}^K \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \mu} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^{*T} \right] \mathbf{V}_j,$$

где  $\mathbf{U}_k$  — собственные векторы матрицы  $\mathbf{X}\mathbf{X}^H$ ;  $\sigma_k^2$  — сингулярные числа корреляционной матрицы. При малом параметре регуляризации  $\mu$  выходной эффект ортогонального проектора в силу нормировки практически не зависит от собственных чисел этой матрицы.

Ввиду сложности работы с обращенной матрицей, также как и ранее воспользуемся нулевым приближением.

Сначала рассмотрим модель с сигналом постоянной амплитуды. Ранее мы при вычислении математического ожидания выходного эффекта производили усреднение числителя и знаменателя по отдельности, воспользуемся подобным подходом и в данном случае, однако с учетом того, что

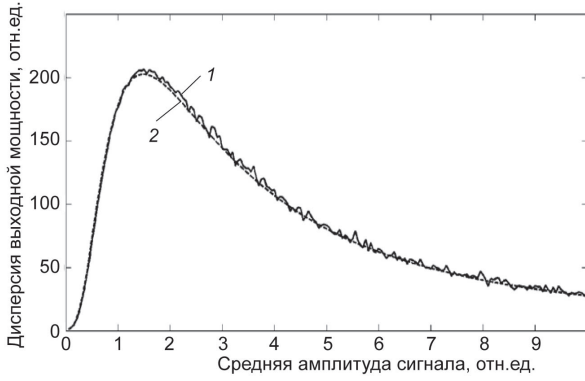


Рис. 2. Зависимость дисперсии выходного эффекта проекционного алгоритма в направлении на источник сигнала от средней амплитуды сигнала. 1 — результат моделирования, 2 — по формуле (18). Число элементов  $L = 60$ ; число выборок усреднения  $T = 10\,000$ ; дисперсия помехи 1.

теперь количество некоррелирующих амплитуд становится много больше единицы. Матрица взаимных корреляций, стоящая в середине ортогонального проектора представляется в виде:

$$\mathbf{X}^H \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{V}^H + n \mathbf{N}_1^H \\ \vdots \\ \alpha \mathbf{V}^H + n \mathbf{N}_K^H \end{pmatrix} (\alpha \mathbf{V} + n \mathbf{N}_1 \cdots \alpha \mathbf{V} + n \mathbf{N}_K) =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 L + n^2 \mathbf{N}_1^H \mathbf{N}_1 & \cdots & \alpha^2 L + n^2 \mathbf{N}_1^H \mathbf{N}_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^2 L + n^2 \mathbf{N}_K^H \mathbf{N}_1 & \cdots & \alpha^2 L + n^2 \mathbf{N}_K^H \mathbf{N}_K \end{pmatrix}$$

Производя ее усреднение по помехам с учетом их некоррелированности на различных тактах обучающей выборки, получаем:

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{X}^H \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \alpha^2 L + n^2 L & \cdots & \alpha^2 L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^2 L & \cdots & \alpha^2 L + n^2 L \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \alpha^2 + n^2 & \cdots & \alpha^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^2 & \cdots & \alpha^2 + n^2 \end{pmatrix} =$$

$$= L \left[ \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + n^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right] = Ln^2 \left[ \frac{\alpha^2}{n^2} \mathbf{I}_K + \mathbf{I}_K \right]$$

Здесь введены следующие обозначения  $\mathbf{I}_K = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{I}_K$  — единичная матрица  $K$ -го порядка.

Несложно получить обратную матрицу по формулам Крамера. Значения диагональных элементов обращаемой матрицы:

$$\mathbf{Y}^{-1}(i, i) = \frac{((K-1)\alpha^2 + n^2)}{Ln^2(K\alpha^2 + n^2)}.$$

Значения на недиагональных элементах также оказываются равны между собой:

$$\mathbf{Y}^{-1}(i, j) = \frac{-\alpha^2}{Ln^2(K\alpha^2 + n^2)}.$$

Подставляя полученную матрицу в выражение для расчета выходного эффекта, получаем

$$\bar{S} = M \left[ \sum_{i=1}^K \mathbf{Y}^{-1}_i \cdot (\alpha^2 |r|^2 + n^2 \|N_i\|^2) + 2 \sum_{i=1}^K \sum_{j>i}^K \mathbf{Y}^{-1}_i (\alpha^2 |r|^2 + n^2 N_j^H N_i) \right] =$$

$$= \left[ K \frac{((K-1)\alpha^2 + n^2)}{Ln^2(K\alpha^2 + n^2)} - \frac{K(K-1)\alpha^2}{Ln^2(K\alpha^2 + n^2)} \right] (\alpha^2 |r|^2 + n^2 L) = \frac{\alpha^2 |r|^2 + n^2 L}{L \left( \alpha^2 + \frac{n^2}{K} \right)}. \quad (11)$$

Полученная оценка хорошо согласуется с результатами исследования свойств чистых помех, при отсутствии сигнала математическое ожидание выходного эффекта становится равным  $\bar{S}_0 = K$ , при устремлении отношения сигнал/помеха к бесконечности, выходной эффект стремится к  $L$ . Формула (11) продолжает хорошо работать и при использовании модели случайного сигнала, нужно лишь заменить  $\alpha^2$  на  $\alpha^2$ , результат работы представлен на рис. 3.

**Сравнение с неадаптивной обработкой при применении на практике.** Рассмотрим, как ведут себя индикаторные отношения сигнал/помеха (иОСП) при использовании алгоритма Бартлетта и «быстрого» проекционного алгоритма. Выражение для расчета иОСП следующее:

$$SNR = \frac{S_{s+n} - S_n}{\delta(S_n)}, \quad (12)$$

где  $S_{s+n}$  — выходная мощность смеси сигнала и шума,  $S_n$  — выходная мощность шумовой компоненты,  $\delta(S_n)$  — СКО флуктуаций шумовой компоненты. Часто вместо флуктуаций помеховой компоненты используют ее уровень, однако это исходит из предположения, что они равны между собой, что в случае адаптивной обработки не так. В первую очередь, необходимо заметить, что на практике всегда имеет место работа с широкой полосой частот и несколькими временными тактами накопления. Формулы для получения выходного эффекта упомянутых алгоритмов по некоторому направлению записываются в следующем виде:

$$S_1 = \frac{1}{TJK} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{JK} \mathbf{v}_j^H \mathbf{X}_{j,t} \mathbf{X}_{j,t}^H \mathbf{v}_j, \quad S_2 = \frac{1}{TJ} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \mathbf{v}_j^H \mathbf{P}_{j,t} \mathbf{v}_j, \quad (13)$$

где  $T$  — число временных отсчетов,  $J$  — число частотных полос, содержащих по  $K$  частотных отсчетов. Для направления, по которому приходит сигнал, дисперсия уровня уменьшается в  $TJ$  раз, что приводит к возрастанию в корень из этого числа раз иОСП. Реальный выигрыш можно оценить только для малых значений мощности сигнала, так как проекционный алгоритм является алгоритмом с естественными ограничениями, выражение для иОСП будет иным для больших мощностей. Вывод этого выражения из принципа максимального правдоподобия сильно осложнен неизвестностью плотности вероятности распределения выходного эффекта, поэтому он в данной статье не производится. В случае исследования характеристики для простой тактической ситуации, состоящей из одного полезного сигнала малой мощности, можно использовать выражение (12). В приближении сигналов малой мощности выражения для иОСП алгоритма Бартлетта и проекционного алгоритма соответственно переписутся следующим образом:

$$SNR_1 = \frac{\bar{\alpha}^2}{n^2} L \sqrt{JTK}, \quad (14)$$

$$SNR_2 \approx \frac{\bar{\alpha}^2}{n^2} \sqrt{JT} \frac{K \sqrt{L} (L - K)}{\sqrt{L^2 - K^2}}, \quad K < L. \quad (15)$$

Результат деления выражения (15) на (14) показывает относительное изменение в иОСП:

$$\frac{SNR_2}{SNR_1} = \sqrt{\frac{K}{L}} \sqrt{\frac{L - K}{L + K}}, \quad K < L. \quad (16)$$

Выражение (16) всегда меньше единицы, что свидетельствует о падении иОСП по слабым целям при обработке проекционными алгоритмами, нежели при неадаптивной обработке. Оптимальный размер обучающей выборки:

$$K = L(\sqrt{2} - 1). \quad (17)$$

При выборе параметра  $K$  в соответствии с формулой (17), потери иОСП по слабым целям будут составлять примерно 50 %. Такое сильное падение мощности объясняется нерациональным усилением чистого шума в выходном сигнале. Это происходит при обращении центральной эрмитовой матрицы в формуле (2). Борьба с этим фактом достаточно просто, рассмотрим спектральное разложение обращенной матрицы:

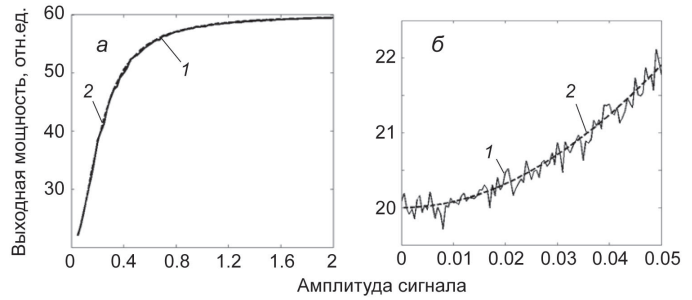


Рис. 3. Зависимость выходной мощности проекционного алгоритма в направлении на источник сигнала от средней амплитуды сигнала. *a* — большие амплитуды сигнала; *b* — малые амплитуды сигналов. 1 — результат моделирования, 2 — по формуле (25). Число элементов  $L = 60$ ; число выборок усреднения  $T = 100$  (*a*), 500 — (*b*); дисперсия помехи 1. Размер обучающей выборки  $K = 20$ .

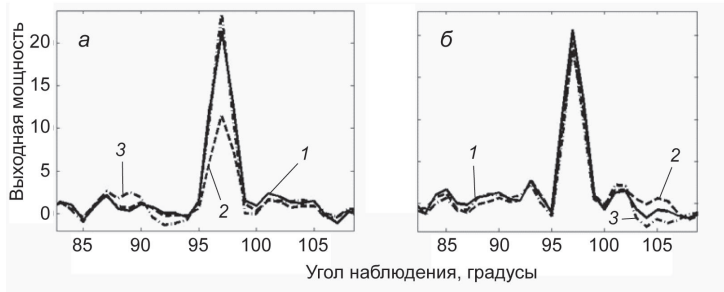


Рис. 4. График выходного иОСП от угла прихода.

Присутствует слабый сигнал мощностью по шуму  $-30$  дБ.

1 — выход алгоритма Бартлетта; 2 — выход проекционного алгоритма; 3 — выход алгоритма Кейпона.  $L = 96$ ; число временных выборок  $T = 1000$ . Размер обучающей выборки для проекционного алгоритма  $K = 40$ . Выход проекционного алгоритма по формуле (13) — а, по формуле (18) — б; число вырезанных собственных чисел 15.

$$(\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} = \left( \sum_{i=1}^K \lambda_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \right)^{-1} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{X}^H \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{U}_i$  — собственные векторы. Младшие собственные числа, относящиеся к шумовой компоненте, после обращения становятся преобладающими. Предположим, что собственные числа отсортированы по убыванию, тогда, выбросив из расчета  $M_1$  младших собственных чисел, мы можем обеспечить существенное возрастание иОСП при несущественных вычислительных затратах. Формула для расчета выходного эффекта переписывается

в следующем виде:

$$S_j = \mathbf{v}_j^H \mathbf{X} \left( \sum_{i=1}^{K-M_1} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \right) \mathbf{X}^H \mathbf{v}_j. \quad (18)$$

Как видно на рис. 4, при использовании модифицированного спектра обращенной матрицы удается получить значительный прирост выходного иОСП на слабых сигналах.

\*\*\*

Были выведены первые моменты для выходного эффекта «быстрого» проекционного алгоритма. Были сделаны сравнения индикаторного отношения сигнал/помеха алгоритма Бартлетта и «быстрого» проекционного алгоритма и получено оптимальное значение размера обучающей выборки. Получив характеристики интересующих нас объектов, можно легко рассчитать вероятности обнаружения целей с различными мощностями излучения для предполагаемого диапазона тактических ситуаций. После получения соответствующих данных, персональных для каждого гидроакустического средства, выставляются пороги обнаружения применительно к индикаторному отношению сигнал/помеха. Не смотря на то, что использование рассматриваемого ортогонального проектора приводит к некоторым потерям по отношению к стационарным некоррелированным помехам на элементах антенной решетки, два фактора могут обеспечить существенные преимущества этого алгоритма в реальных условиях:

- обеспечение стационаризации выходных эффектов при изменении параметров нестационарных входных воздействий;
- реализация быстрой процедуры подавления сильных мешающих локальных источников на интервале частоты и времени со стабильными интервалами флуктуаций.

Эти особенности «быстрых» проекционных алгоритмов могут обеспечить их значительные преимущества в сложных, быстро изменяющихся ситуациях.

### Литература

1. Capon J. High Resolution Frequency-Wavenumber Spectral Analysis // Proc. IEEE. August 1969. V. 57. P. 1408–1418.
2. Jonson D. H., DeGraaf S. R. Improving The Resolution Of Bearing In Passive Sonar Arrays By Eigenvalue Analysis // IEEE Trans On Acoustic, Speech And Signal Processing. August 1982. V. ASSP-30, N 4.
3. Малышкин Г. С. Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов. Т. 2: Адаптивные методы. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2011. 374 с.
4. Леховицкий Д. И., Флексер П. М., Атаманский Д. В., Кириллов И. Г. Статистический анализ некоторых «сверхразрешающих» методов пеленгации источников шумовых излучений в АР при конечном объеме обучающей выборки // Сб. Антенны. 2000. Вып. 2 (45). С. 23–39.
5. Малышкин Г. С., Мельканович В. С., Шафранюк Ю. В. Проекционные адаптивные алгоритмы для обнаружения и оценки параметров слабых сигналов в режиме шумопеленгования // Успехи современной радиоэлектроники. 2012. № 3. С. 68–79.

Статья поступила в редакцию 22.07.2014 г.