УДК 532.511

© *М. Ю. Белевич*
Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Россия
mbelevich@yahoo.com

СВЯЗЬ УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ И ДИФФУЗИИ ПЛОТНОСТИ

Математическая модель механики жидкости включает в себя и так называемое уравнение неразрывности, являющееся следствием закона сохранения массы. В последние десятилетия вид этого уравнения неоднократно подвергался ревизии. Однако до сегодняшнего дня общая точка зрения все еще не выработана. В настоящей работе обсуждается целесообразность модификации уравнения неразрывности. Аргументом в пользу модификации служит простой пример задачи, не имеющей решения в рамках стандартного подхода, т. е. в случае использования в модели жидкости стандартного уравнения неразрывности. Речь идет о моделировании выравнивания скачка плотности в покоящейся жидкости при условии устойчивой стратификации. Отсутствие решения означает противоречие в постановке задачи. Такое противоречие обнаруживается, изучаются причины его возникновения, а также пути преодоления. Последнее, как выясняется, может быть достигнуто в результате корректного осреднения системы уравнений гидромеханики, что необходимо делать ввиду принимаемого параметрического описания мелкомасштабных движений. Анализ процедуры вывода системы уравнений механики жидкости позволяет понять, какие требования следует предъявлять к возможной модификации уравнения неразрывности. Анализируется также процедура осреднения и описывается корректное осреднение уравнений модели жидкости, включая уравнение неразрывности, без каких-либо дополнительных предположений типа несжимаемости. К описываемой проблеме примыкает предложенное П.С. Линейкиным уравнение диффузии плотности. В работе критически оценивается вывод этого уравнения и обсуждается его возможное место в системе уравнений гидромеханики.

Ключевые слова: уравнение неразрывности, уравнение диффузии плотности, процедура осреднения

M. Yu. Belevich
Saint-Petersburg Department of the P. P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, St.-Petersburg, Russia

RELATIONSHIP BETWEEN THE CONTINUITY EQUATION AND THE MASS DENSITY DIFFUSION EQUATION

Mathematical model of fluid mechanics includes the so-called continuity equation, which follows from the mass conservation law. In recent decades this equation repeatedly subjected to revision. However, until now the common viewpoint is not yet developed. This paper examines the expediency of modification of the continuity equation. As an argument in favor of modifications we use a simple example of a problem that has no solution in the framework of the standard approach, i.e. in case of use of the standard continuity equation in the model of the fluid. The matter concerns modeling of evolution of the mass density jump in stationary fluid under the condition of stable stratification. The absence of solution means the presence of a contradiction in the problem posing. Such a contradiction is detected and its causes and ways to overcome it are studied. The latter, as it turns out, can be achieved by proper averaging of the fluid mechanics equations that needs to be done in view of the adopted parametric description of small-scale movements. The analysis of derivation of the system of fluid mechanics equations allows understanding, what requirements should satisfy possible modifications of the continuity equation. We also analyze the averaging procedure and describe the correct averaging of equations of the fluid model, the continuity equation including and without any extra assumptions like incompressibility. Current problem adjoins to the mass density diffusion equation, suggested earlier by P.S. Lineykin. We critically assess the derivation of this equation, and discuss its possible place in the system of fluid mechanics equations.

Key words: the continuity equation, the mass density diffusion equation, the averaging procedure.

Белевич М. Ю. Связь уравнений неразрывности и диффузии плотности // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2016. Т. 9, № 1. С. 73—82.

Belevich M. Yu. Relationship between the continuity equation and the mass density diffusion equation. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika.* 2016, 9, 1, 73—82.

С середины прошлого века появляются работы, в которых либо обсуждаются, либо используются модификации уравнения неразрывности. По существу, все изменения сводятся к переопределению плотности потока массы. Одними из первых подобное обобщение рассмотрели авторы работ [1, 2], которые предлагали дополнить стандартное выражение для плотности потока массы слагаемыми, пропорциональными градиентам плотности массы и температуры. Ответом на это явились критические отзывы [3, 4], объявляющие высказанные соображения неверными и утверждающие, что перенос массы, какими бы причинами он не вызывался, полностью характеризуется величиной $\rho\vec{v}$ (ρ — плотность массы, $\vec{v}$ — макроскопическая скорость течения среды), и называющие постановку вопроса об учете диффузионных явлений в указанных работах беспредметной. Несмотря на это, в работах [5—7] с позиций кинетической теории, наряду с прочим, вновь рассматривается уравнение неразрывности с учетом самодиффузии, а также дополнительного вклада в поток вещества, обусловленного подвижностью частиц в поле внешних сил.

Кроме того, существует цикл работ прикладного характера, посвященный новому направлению численного решения уравнений динамики жидкости, в основе которого лежит замена стандартной системы Навье—Стокса системой так называемых квазигидро- или квазигазодинамических уравнений [8, 9]. Процедура получения таких уравнений также включает переопределение плотности потока массы, что приводит, помимо всего прочего, к нестандартному уравнению неразрывности. Новая система уравнений отличается от стандартной малыми диссипативными добавками, играющими роль регуляризаторов и обеспечивающих эффективность разностных алгоритмов, в связи с которыми она и появилась.

Во всех цитированных работах модифицированные уравнения неразрывности рассматривались как замена стандартного уравнения. Имеется, однако, ряд работ, посвященных расчету морских течений, в которых также используется видоизмененное уравнение неразрывности, но место в общей системе уравнений ему отводится иное. Начиная с работы [10], новое уравнение выводят из уравнений солевой диффузии и теплопроводности, а также линейного уравнения состояния. Оно отличается от обычного уравнения неразрывности диффузионным слагаемым в правой части, а значит, и здесь неявно переопределяется плотность потока массы. Это уравнение получило название *уравнения диффузии плотности*, используется вместо уравнений теплопроводности и диффузии соли и служит для замыкания системы уравнений. Сама система, между тем, содержит и стандартное уравнение неразрывности.

Все авторы указывают на положительный эффект от замены уравнения неразрывности, либо всей системы Навье—Стокса новыми уравнениями. При этом, однако, окончательный вид уравнения неразрывности остается дискуссионным, что позволяет сделать еще одну попытку разобраться в этой проблеме.

В отличие от ряда авторов, предпочитающих основывать свои исследования на рассмотрении обобщенного уравнения Больцмана, в настоящей работе мы будем придерживаться рамок механики континуума. Сформулированные для реальной жидкости интегральные законы считаются, затем, выполняющимися для крупномасштабных движений сплошной среды. Кроме того, мы сосредоточим внимание на уравнении неразрывности, поскольку все упомянутые модификации системы Навье—Стокса радикальным образом меняют именно его.

В этой связи предлагается обсудить следующие вопросы.

Является ли стандартное уравнение неразрывности удовлетворительным в том смысле, что система уравнений гидромеханики, его включающая, имеет решение для любой разумной постановки задачи?

Поскольку ответ на этот вопрос, как легко показать, отрицательный (см. ниже задачу о скачке плотности, где приводится контрпример), имеет смысл обсудить еще два вопроса.

1. Что должно учитывать уравнение неразрывности, а что оно учитывать не может в силу общей схемы вывода уравнений гидромеханики и порядка введения (определения) новых величин (плотностей массы, сил, импульса и проч.)?

2. Как должно выглядеть «правильное» уравнение неразрывности и каково его место в системе уравнений гидромеханики?

Работа построена следующим образом. Ниже приводится пример задачи, не имеющей решения в рамках стандартной гидромеханики вязкой или идеальной жидкости. Затем обсуждается возможный вид нестандартного уравнения неразрывности, для чего анализируется процедура вывода основных уравнений механики сплошной среды. Далее исследуется процедура осреднения и описывается ее новый вариант, предложенный в [11], проводится осреднение уравнения неразрывности и выводится уравнение диффузии плотности (оно же нестандартное уравнение неразрывности). Подобное уравнение, как было сказано, часто применяется в геофизических задачах [12, 13], хотя и получается из других соображений [10], критический анализ которых приведен в разделе, посвященном обсуждению полученных результатов.

Задача о скачке плотности и ее следствия. Легко привести пример опыта, попытка описать который с помощью стандартной системы уравнений гидромеханики приводит к задаче, не имеющей решения, и, тем самым, к противоречию с данными наблюдений.

Рассмотрим эволюцию одномерной температурной неоднородности $\theta(t, x)$ и связанной с ней плотностной неоднородности $\rho(t, x)$ в покоящейся жидкости. Пусть это будет двухслойная, горизонтально однородная среда с устойчивой (чтобы исключить появление макроскопических движений, см. [14], § 4) стратификацией, образованной вертикальным скачком температуры. Давление на поверхности, а также температуру на поверхности и на дне считаем известными константами. Наблюдаемая эволюция такой системы состоит в рассасывании неоднородности и установлении линейных профилей и температуры и плотности.

Запишем систему уравнений модели вязкой теплопроводящей жидкости в поле силы тяжести (уравнения неразрывности, движения (баланса импульса), теплопроводности (баланса энергии) и состояния):

$$\begin{aligned} &d_t\rho + \rho\mathrm{div}\vec{\vec{\mathrm{v}}} = 0,\\ &\rho d_t\vec{\vec{\mathrm{v}}} = -\nabla p + 2\mu\mathrm{div}\mathrm{D} + \rho\vec{g},\\ &\rho C_p d_t\theta = d_t p + 2\mu\mathrm{D} : \mathrm{D}{+}\lambda\Delta\theta,\\ &\rho = \rho\left(p,\theta\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность массы; p — давление; $\vec{g}$ — ускорение силы тяжести; μ — коэффициент динамической вязкости; θ — температура; D — тензор скоростей деформации; C_p — теплоемкость при постоянном давлении; λ — коэффициент теплопроводности. Неизвестными являются четыре величины $(\rho, \vec{\vec{v}}, p, \theta)$, так что система четырех уравнений замкнута.

Если теперь учесть, что по условию задачи $\vec{\vec{v}} = 0$, а среда горизонтально однородна, систему можно привести к виду

$$\begin{aligned} &\partial_t\rho = 0,\\ &0 = \partial_z p - \rho g,\\ &\rho C_p\partial_t\theta = \partial_t p + \lambda\partial_{zz}\theta,\\ &\rho = \rho\left(p,\theta\right). \end{aligned} \tag{2}$$

где z — направленная вверх вертикальная координата; $g = |\vec{g}|$. Полученная система (2) является переопределенной и, очевидно, не имеет решения.

Действительно, из первого уравнения системы (2) следует сохранение во времени начального профиля плотности массы. В силу этого второе уравнение описывает поле давления с независящим от времени вертикальным профилем: если в качестве граничного условия задать на поверхности постоянное значение давления, то и p будет зависеть только от вертикальной координаты. Третье уравнение превратится в простое одномерное уравнение теплопроводности $\partial_t\theta = \kappa\partial_{zz}\theta$ (где κ — коэффициент температуропроводности) и будет описывать временную эволюцию начального профиля температуры в соответствии с заданными граничными условиями. В рассматриваемом случае (фиксированные значения температуры на поверхности и на дне) такая эволюция означает размывание за счет теплопроводности температурного скачка и установление линейного профиля температуры. Последнее уравнение, в свою очередь, позволяет определить эволюцию начального профиля плотности массы. Поскольку существование такой эволюции противоречит первому уравнению, задача не имеет решения.

В чем причина отмеченного противоречия? На наш взгляд она кроется в некорректно проведенном выводе уравнений модели, а точнее, уравнения неразрывности. Математически эта причина состоит в том, что стандартное уравнение неразрывности и уравнение теплопроводности являются уравнениями разных типов. Первое имеет гиперболический тип и описывает перенос начального условия без изменения вдоль характеристик. Второе же — параболическое уравнение, решение которого удовлетворяет принципу максимума и при постоянных граничных условиях описывает диффузию начального возмущения.

Заметим, что с тем же успехом для описания рассматриваемого опыта можно было бы воспользоваться и системой уравнений идеальной жидкости, которая также включает уравнение теплопроводности. В основе обеих моделей лежит гипотеза сплошности, чем вызван отказ от явного описания мелкомасштабных движений и переход к параметрическому их описанию. Таким параметром служит внутренняя энергия и ее плотность или ассоциированная с ней температура. Внутренняя энергия интерпретируется как средняя кинетическая энергия мелкомасштабных движений, и появление этого параметра фактически связано с процедурой осреднения системы дифференциальных уравнений сплошной среды непосредственно следующих из интегральных принципов и формально справедливых для движений любых масштабов.

Исходным предметом исследования в механике континуума является движение очень большой совокупности материальных частиц. Гипотеза сплошности, используемая в качестве вспомогательного средства, позволяет заменить указанную систему частиц сплошной средой, а совокупность индивидуальных характеристик движения — полевыми функциями. В конечном счете эти поля должны рассматриваться как результат осреднения множества индивидуальных характеристик, а вся теория как приближенная, описывающая движение фиктивных точек среды по сглаженным траекториям.

Сглаживание траекторий приводит к тому, что поле скоростей точек континуума $\vec{v}$ заменяется осредненным полем $\bar{\vec{v}}$, а кинетическая энергия точек среды T — отличной от нее, в общем случае, кинетической энергией среднего движения K. Дефицит кинетической энергии учитывают параметрически путем введения, так называемой, внутренней энергии E. Все это оформляется в виде постулата, известного как первое начало термодинамики $d_t(K + E) = W + Q$, где W — мощность действующих сил, а Q — скорость внешнего нагрева. В общем случае допускается взаимный обмен между кинетической и внутренней энергиями среды, в силу чего указанное осреднение не только порождает уравнение баланса внутренней энергии, но и отражается на уравнении баланса кинетической энергии и уравнении движения.

Что же касается уравнения неразрывности, то осреднение его не затрагивает и оно (уравнение), тем самым, неявно считается справедливым для любых сколь угодно малых объемов среды. Тот же результат можно найти и там, где осреднение уравнения неразрывности проводится явно (речь идет о модели турбулентной жидкости). Однако здесь это связано с тем, что осреднению предшествует принятие дополнительной гипотезы несжимаемости [15], что позволяет отождествлять неразрывность среды с бездивергентностью поля скорости. Осреднение же линейного уравнения $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ сохраняет его вид, т. е. дает $\operatorname{div}\bar{\vec{v}} = 0$. Как было показано выше, такие рассуждения могут приводить к задачам, не имеющим решения, и противоречию с опытом.

Анализ вывода уравнений модели жидкости. Чтобы выяснить, что должно учитывать уравнение неразрывности и что оно учитывать не может, рассмотрим общую схему вывода уравнений механики сплошной среды, а также порядок введения в теорию новых определяемых величин. Очевидно, что величины, которые к моменту появления в модели уравнения не были определены, учитываться этим уравнением не могут и не должны.

Последовательный вывод уравнений модели среды можно представить в виде следующей совокупности шагов.

1. Получение опытных данных о движении среды и формулировка согласующихся с ними интегральных соотношений (поскольку именно интегральные характеристики тел доступны измерению). Таких соотношений три:

— закон сохранения массы M тела $d_t M = 0$;

— закон движения (равенство скорости изменения импульса $\mathbf{m}$ силе $\mathbf{f}$, действующей на тело) $d_t\mathbf{m} = \mathbf{f}$;

— закон сохранения энергии.

2. Принятие гипотезы сплошности, т. е. замена совокупности материальных точек континуумом и допущение того, что полученные интегральные соотношения справедливы и для континуума. В строящейся теории эти соотношения рассматриваются как постулаты.

3. Введение плотностей интегральных величин и вывод из интегральных соотношений (постулатов) дифференциальных уравнений формально справедливых в любой сколь угодно малой окрестности каждой точки континуума:

— уравнение неразрывности;

— уравнение движения;

— уравнение баланса энергии.

4. Учет границ применимости теории, что приводит к отказу от явного описания процессов произвольных масштабов, переходу к осредненным уравнениям и параметрическому описанию мелкомасштабных процессов. В результате должно получиться следующее:

— осредненное уравнение неразрывности;

— осредненное уравнение движения;

— уравнение баланса внутренней энергии или закон сохранения полной энергии.

Сделаем два замечания к приведенной схеме.

Во-первых, постулаты, лежащие в основании теории должны быть независимыми, и они таковыми являются. По этой причине обсуждение закона сохранения массы, как и вывод согласующегося с ним дифференциального уравнения, не требует, вообще говоря, постулирования второго и третьего законов, т. е. может проводиться независимо от них. Как известно, для получения дифференциальных уравнений модели жидкости необходимо введение в рассмотрение локальных характеристик среды. Для получения уравнения неразрывности требуется определить лишь две характеристики: плотность массы ρ и скорость $\vec{v}$ перемещения точек континуума. Никаких слагаемых, описывающих влияние тех или иных сил, это уравнение содержать не может и не должно. На этом этапе разработки теории их определение не требуется.

Сама плотность массы, разумеется, может зависеть от действующих на жидкость сил, но эта зависимость неявная, связанная с полем скорости. Явная зависимость также может иметь место, но описывается она другим уравнением, а именно, уравнением состояния. Единственно, где в дифференциальном законе сохранения массы могли бы фигурировать величины, отличные от плотности массы и скорости — это параметры (коэффициенты), ежели таковые потребуется в этот закон ввести.

Во-вторых, принятая в литературе процедура получения уравнений модели среды [14, 16—22] отличается от приведенной тем, что последний шаг выполняется лишь частично. Фактическому осреднению подвергается только уравнение баланса плотности кинетической энергии. В вязком случае, кроме того, осредняется и уравнение движения, однако, само осреднение здесь выполняется неявно путем введения, так называемого, тензора вязких напряжений. К уравнению неразрывности эти процедуры не применяются, и оно сохраняет свой исходный вид. В результате получается система уравнений (1), которая внутренне противоречива, как это было показано на разобранном выше примере.

Если же, придерживаясь приведенной схемы, применить осреднение и к уравнению неразрывности, то при определенных допущениях может быть получено, так называемое, уравнение диффузии плотности. Использование его в задаче о скачке плотности вместо уравнения неразрывности исключает указанное противоречие. Ниже описывается предлагаемый метод получения такого уравнения.

О процедуре осреднения. Как уже отмечалось, механика жидкости, основанная на гипотезе сплошности, является макроскопической теорией, описывающей наиболее вероятное поведение систем, состоящих из очень большого числа частиц. Соответственно, уравнения гидромеханики должны описывать осредненное движение точек тела вдоль сглаженных траекторий.

В обычно применяемой процедуре осреднения все гидродинамические переменные независимо друг от друга рассматриваются как случайные процессы [15] и представляются в виде суммы средней (сглаженной) и случайной (пульсационной) составляющих. Такой подход, однако, приводит к трудно обозримым выражениям с большим числом новых неизвестных функций и потому в «чистом» виде не используется (для простоты мы здесь ограничиваемся лишь динамическими уравнениями). Вместо этого, непосредственно перед осреднением принимается ряд упрощающих гипотез (типа приближения Буссинеска), после чего фактическому осреднению подвергаются лишь компоненты скорости. Таким образом, описываемая процедура осреднения на деле не является общей и может быть использована лишь в том случае, когда удается сформулировать указанные упрощения.

Возможен альтернативный взгляд на проблему осреднения. Прежде всего заметим, что в отличие от потенциально измеряемых интегральных параметров среды, локальные характеристики (плотности и скорости, определенные в точке), являются принципиально неизмеряемыми[1] и должны вычисляться в соответствии с их определением и налагаемыми связями, т. е. системой уравнений. Отсюда следует, что исходные гидромеханические поля, какими бы изменчивыми они не были, в действительности не являются независимыми. Напротив, они тесно связаны друг с другом, и их связь задается некоторой системой уравнений, например, идеальной или вязкой жидкости (обсуждение правомерности применения уравнений гидромеханики для описания турбулентных течений см. в [15], с. 217). Это означает, что случайное возмущение в любом из рассматриваемых полей порождает возмущения в остальных. При этом порождаемые возмущения таковы, что все поля по-прежнему удовлетворяют указанной системе уравнений. Другими словами, указанные возмущения не являются случайными и при отсутствии исходного возмущения тождественно равны нулю.

Если одно из гидромеханических полей выбрать в качестве независимого и именно у него допустить наличие случайной составляющей, тогда остальные поля, функционально с ним связанные, будут также ее содержать. Напротив, остальные поля могут считаться гладкими (т. е. не содержащими случайной составляющей), если они вычисляются по сглаженному полю независимой величины. Таким независимым полем, очевидно, удобно считать некую первичную характеристику среды (в смысле очередности их появления при построении теории). Разумным выбором представляется поле скорости точек жидкости.

Действительно, при построении модели жидкости [21] исходными представлениями служат независящая от времени масса жидкости M и ее объем $V(t)$. Можно легко показать, что скорость изменения объема d_tV определяется векторным полем скорости $\vec{v}$. Так, если в некоторый отсчетный момент времени t_0 объем жидкости есть V_0, то текущий объем вычисляется по формуле

$$V(t)=\int_{V_0} JdV\,,$$

где J — якобиан преобразования лагранжевых переменных в эйлеровы. Скорость изменения объема равна

$$d_tV=\int_{V_0} d_tJdV=\int_{V}\frac{1}{J}d_tJdV=\int_{V}\mathrm{div}\vec{v}dV\,, \tag{3}$$

что дает дифференциальное соотношение, справедливое в произвольной точке жидкости [22]

$$\frac{1}{J}d_tJ=\mathrm{div}\vec{v}\,. \tag{4}$$

Обратим внимание на то, что задача осреднения или разделения движений по масштабам может быть поставлена уже на этом шаге разработки теории, хотя ни плотность массы, ни плотности сил еще не были введены в рассмотрение и определены. Таким образом, единственной зависящей от времени мерой, могущей содержать случайную компоненту, является объем жидкости. В соответствии с (3) его эволюция определяется полем скорости. Согласно (4), вектор скорости $\vec{v}$ и якобиан J и есть те локальные характеристики движущейся жидкости, которые могут рассматриваться как первичные (в указанном выше смысле), в отличие от плотности массы, давления и т. п. Поскольку движущаяся среда обычно описывается в терминах скорости, удобно использовать скорость среды в качестве той характеристики, которая подвергается осреднению (тем более, что это соответствует сложившейся практике).

Оператор осреднения (обозначаемый далее угловыми скобками $\langle\ \rangle$) должен быть непрерывным линейным проектором, отображающим множество несглаженных объектов на множество осредненных объектов [15]. Представим каждую неосредненную траекторию $\chi(t)$ как сумму сглаженной кривой $\bar{\chi}(t)$ и пульсации $\chi'(t)$. Тогда вектор скорости $\vec{\nu}(t)$ в каждой точке можно записать в виде суммы $\vec{\bar{\nu}}(t)+\vec{\nu}'(t)$. Первое слагаемое является касательным вектором к сглаженной траектории, а второе — вектором, касающимся пульсации. Вектор $\vec{v}$ понимается, как сумма двух элементов касательного векторного пространства.

---

[1] Повсеместно используемое экспериментальное определение, т. е. измерение, различных локальных параметров (скоростей, плотностей, температуры, давления и т. п.) не должно вводить в заблуждение. В каждом таком случае измеряется отнюдь не предел отношения мер (интегральных параметров) в некоторой точке континуума, т. е. не то, чем является локальный параметр по определению, а отношение мер малых, но конечных объемов реальных жидкостей. Поскольку любой такой объем всегда содержит бесконечно много точек среды, каждое измерение само фактически является осреднением.

Уравнение диффузии плотности. Одной из основных идей, лежащих в основе механики жидкости, является разделение движений среды по масштабам. Крупномасштабные движения (относительно заранее оговоренных масштабов) описываются явно, тогда как мелкомасштабные движения описываются параметрически. Уравнения крупномасштабной эволюции жидкой среды получаются в результате осреднения исходных дифференциальных законов. Здесь нам потребуется лишь закон сохранения массы

$$\partial_t \rho + \mathrm{div} \rho \vec{v} = 0. \tag{5}$$

В упомянутой работе [15] при обсуждении осреднения этого уравнения рассматривается лишь вариант несжимаемой жидкости, что естественно, поскольку и уравнение Навье—Стокса и уравнение Рейнольдса по определению суть уравнения движения несжимаемых сред. Осреднение уравнения (5), записанного в виде суммы двух равных нулю слагаемых

$$\left\langle \frac{1}{\rho} d_t \rho + \mathrm{div} \vec{v} \right\rangle = 0$$

приводит, в силу непрерывности и линейности оператора осреднения, к уравнению неразрывности среднего движения

$$\mathrm{div} \bar{\vec{v}} = 0. \tag{6}$$

При этом уравнение $\left\langle \frac{1}{\rho} d_t \rho \right\rangle = 0$ обычно трактуется как

$$\frac{1}{\bar{\rho}} d_t \bar{\rho} = 0, \tag{7}$$

для чего принимаются соответствующие допущения (см., например, [15], с. 64).

Плотность массы — величина, вычисляемая по полю скорости, и какой она будет зависит от того, что мы понимаем под полем скорости. По этой причине плотности, полученные с использованием уравнений (5) и (7), вообще говоря, разные. *Величину* $\bar{\rho}$, при этом, *следует понимать* не как результат осреднения некоторой независимой случайной величины ρ, а *как плотность, вычисленную по осредненному полю скорости* $\bar{\vec{v}}$. Разность $\rho' \equiv \rho - \bar{\rho}$ можно называть пульсацией плотности, имея, однако, в виду, что она не является независимой случайной величиной, а порождена мелкомасштабными вариациями поля скорости (пульсациями скорости) и в их отсутствие равна нулю. Таким образом, плотность ρ соответствует исходному полю скорости $\vec{v}$, а плотность $\bar{\rho}$ — осредненному полю $\bar{\vec{v}}$.

Вместе с тем ясно, что мелкомасштабная, не описываемая явно составляющая поля скорости ответственна за некоторое перемещение массы и ее перераспределение. Наряду со средним течением она также принимает участие в формировании поля плотности массы. Например, если в отсутствие среднего течения имеет место устойчивая плотностная стратификация среды, вызванная неравномерным нагревом, или неоднородной концентрацией примеси, пульсации скорости могут осуществлять выравнивание плотностных неоднородностей за счет теплопроводности, диффузии примеси (подробное обсуждение этой темы можно найти в статье [11]) или турбулентности. В отличие от утверждений, сделанных в работах [3, 4], на наш взгляд имеет смысл говорить о диффузионных явлениях не только в случае смеси, но и в случае однокомпонентной среды, понимая под ними мелкомасштабный перенос вещества пульсационной составляющей поля скорости.

Чтобы учесть эти процессы, выведем уравнение, связывающее поле ρ с полем средней скорости. Представим скорость в виде $\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'$, подставим в уравнение (5) и осредним

$$\left\langle \partial_t \rho + \mathrm{div} \rho (\bar{\vec{v}} + \vec{v}') \right\rangle = \left\langle \partial_t \rho \right\rangle + \mathrm{div} \left(\left\langle \rho \bar{\vec{v}} \right\rangle + \left\langle \rho \vec{v}' \right\rangle \right) = 0. \tag{8}$$

Далее существует два варианта действий.

1. Можно пренебречь третьим слагаемым в (8), считать, что плотность потока массы равна $\left\langle \rho \bar{\vec{v}} \right\rangle = \bar{\rho} \bar{\vec{v}}$ и получить уравнение, описывающее эволюцию плотности, соответствующей осредненному полю скорости

$$\partial_t \bar{\rho} + \mathrm{div}(\bar{\rho} \bar{\vec{v}}) = 0.$$

Это стандартный подход и стандартное же уравнение неразрывности.

2. Можно, ничем не пренебрегая, считать плотность потока массы равной

$$\left\langle \rho \bar{\vec{v}} \right\rangle + \left\langle \rho \vec{v}' \right\rangle, \tag{9}$$

а дополнительное слагаемое попытаться учесть параметрически. Для примера воспользуемся хорошо известной и широко применяемой процедурой, связывающей корреляции с градиентом средних величин. Пусть в отличие от $\bar{\rho}$ величина $\hat{\rho}$ обозначает плотность массы, вычисленную по среднему полю скорости с учетом второго слагаемого в (9). Величина $\rho' \equiv \rho - \hat{\rho}$ — ее отклонение от плотности, соответствующей неосредненному полю скорости $\vec{v}$. Тогда

$$\langle \rho \vec{v}' \rangle = \left\langle (\hat{\rho} + \rho')\vec{v}' \right\rangle = \langle \rho' \vec{v}' \rangle, \tag{10}$$

а поток массы дается выражением

$$\hat{\rho}\bar{\vec{v}} + \langle \rho' \vec{v}' \rangle .$$

Первое слагаемое в (10), как и в стандартном случае, описывает перераспределение поля плотности массы полем среднего течения, а второе — отражает вклад движений, отнесенных к разряду пульсаций. Далее по определению полагаем

$$\langle \rho' \vec{v}' \rangle \equiv -k\nabla\hat{\rho} . \tag{11}$$

Здесь величина k имеет смысл коэффициента диффузии. Таким образом, плотность потока массы дается выражением $\hat{\rho}\bar{\vec{v}} - k\nabla\hat{\rho}$, что согласуется с приведенными выше соображениями о его возможном виде. Осреднение уравнения неразрывности (5) приводит к уравнению баланса массы

$$0 = \langle \partial_t \rho + \mathrm{div}\rho\vec{v} \rangle = \partial_t \hat{\rho} + \mathrm{div}\hat{\rho}\bar{\vec{v}} - \mathrm{div}(k\nabla\hat{\rho}), \tag{12}$$

которое в случае $k = \mathrm{const}$, записывается в виде

$$0 = \langle \partial_t \rho + \mathrm{div}\rho\vec{v} \rangle = \partial_t \hat{\rho} + \mathrm{div}\hat{\rho}\bar{\vec{v}} - k\Delta\hat{\rho} \tag{13}$$

или

$$d_t \hat{\rho} + \hat{\rho}\mathrm{div}\bar{\vec{v}} = k\Delta\hat{\rho} . \tag{14}$$

Уравнение (12), как и его частные случаи (13) и (14), называется *уравнением диффузии плотности* массы движущейся среды.

Модель жидкости основанная на уравнениях Навье—Стокса или Рейнольдса, описывает бездивергентное течение среды. Каждое из этих уравнений получается из более общих приравниванием нулю дивергенции скорости (соответственно, средней скорости). Уравнение диффузии плотности (14) при этом записывается так:

$$d_t \hat{\rho} = k\Delta\hat{\rho} . \tag{15}$$

Обсуждение результатов. В связи с неоднократными попытками получить обобщенное уравнение неразрывности был поставлен вопрос о целесообразности таких обобщений. На простом примере, приводящем в стандартном случае к не имеющей решения задаче, была продемонстрирована оправданность подобных попыток.

Рассмотрение процедуры вывода уравнений модели динамики жидкости позволило утверждать, что уравнение неразрывности, в каком бы виде его ни записывать, должно включать слагаемые, зависящие лишь от плотности массы и скорости перемещения.

Рассмотрена процедура осреднения, предложенная в [11]. Применение ее к уравнению неразрывности позволило получить уравнение диффузии плотности требуемого вида.

Ниже приводятся заключительные замечания и, в частности, обсуждается модификация системы уравнений в задаче о скачке.

1. Процедура осреднения уравнения неразрывности выглядит так, как если бы плотность массы считалась независимой случайной величиной, представимой в виде $\bar{\rho} + \rho'$, где ρ' — независящая от $\vec{v}$ пульсация. Несмотря на то, что результирующее уравнение получилось бы тем же, сходство это лишь формальное. Кроме того, имеется принципиальное отличие от стандартной процедуры осреднения.

Дело в том, что если не принимать в расчет высказанных выше соображений и считать ρ независимой случайной величиной подвергающейся осреднению, то таковой она должна выступать во всех уравнениях модели, что и делается, например, в [14]. В предлагаемой процедуре плотность массы, напротив, не считается случайной величиной. Она вычисляется с помощью (12) по среднему полю скорости и потому во всех остальных уравнениях модели осреднению подвергаться не должна. Другими словами, в остальные уравнения модели в качестве плотности массы фактически входит величина $\hat{\rho}$. То же относится и ко всем прочим переменным задачи, например, внутренней энергии или температуре (см. обсуждение этих вопросов в [11]). Наличие случайной пульсационной составляющей предполагается лишь у поля скорости.

2. Рассмотренная выше простая задача после замены уравнения неразрывности уравнением диффузии плотности позволяет описать выравнивание начального профиля плотности, как это и следует из опыта. Действительно, система (2) теперь записывается так

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho = k \partial_{zz} \rho, \\ &0 = \partial_z p - \rho g, \\ &\partial_t \theta = \frac{1}{\rho C_\rho} \partial_t p + \kappa \partial_{zz} \theta, \\ &\rho = \rho(p, \theta). \end{aligned} \tag{16}$$

Коэффициенты k и κ, очевидно, должны быть близки. Уравнение диффузии плотности имеет тот же тип, что и уравнение теплопроводности. В случае, например, стационарного давления и уравнения состояния, линейного относительно температуры, первое и третье уравнения системы (16) совпадают и описывают выравнивание профиля плотности массы, связанное с процессом теплопроводности.

3. Наряду со стандартной системой уравнений механики вязкой (турбулентной) жидкости, включающей уравнения неразрывности, Навье—Стокса (Рейнольдса) и состояния, в океанологии иногда используется и уравнение диффузии плотности. В указанной системе оно позволяет замкнуть систему уравнений, не увеличивая числа неизвестных, т. е. фактически заменяет уравнение состояния. В употребление его ввел, по-видимому, П. С. Линейкин. Вот как это делается в его книге [10], посвященной теории морских течений:

— выписываются уравнения солевой диффузии и теплопроводности:

$$\rho d_t s = k \Delta s, \ \rho d_t \theta = k \Delta \theta, \tag{17}$$

где s — соленость; θ — температура; k — коэффициент диффузии;

— проводится анализ конкретного вида уравнения состояния морской воды $\rho(p, s, \theta)$, на основании которого пренебрегают сжимаемостью (здесь — зависимостью плотности от давления $\rho(s, \theta)$) и изменчивостью величин $\partial_s \rho$ и $\partial_\theta \rho$ и полагают $\partial_s \rho \equiv \alpha = \text{const}$, $\partial_\theta \rho \equiv \beta = \text{const}$, т. е. рассматривают линейное уравнение состояния. Такое упрощение позволяет записать производные от плотности по времени и координатам в виде

$$\partial_a \rho = \alpha \partial_a s + \beta \partial_a \theta, \ a \in \{t, x, y, z\}. \tag{18}$$

— суммирование уравнений (17) с весами α и β и учет выражения (18), дает искомое уравнение

$$d_t \rho = \frac{k}{\rho} \Delta \rho \approx \frac{k}{\rho_0} \Delta \rho, \ \rho_0 = \text{const}. \tag{19}$$

Далее это уравнение используется совместно с уравнениями движения и неразрывности, которые в декартовых координатах записываются в виде

$$\rho d_t u = -\partial_x p + \mu \Delta u, \ \rho d_t v = -\partial_y p + \mu \Delta v, \ 0 = -\partial_z p + \rho g,$$

$$d_t \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \tag{20}$$

Здесь u и v обозначают горизонтальные компоненты скорости, а сами уравнения приводятся с непринципиальными для изложения упрощениями. Близкие системы можно найти и у других авторов, использующих уравнение диффузии плотности.

Необходимо отметить, что все такие системы уравнений содержат ряд противоречий. Во-первых, сравнивая уравнения (19) и (20), нетрудно заметить, что в модели Линейкина

$$d_t \rho = -\rho \operatorname{div} \vec{v} = \frac{k}{\rho} \Delta \rho,$$

откуда следует, что, несмотря на объявленное при выводе допущение несжимаемости среды, рассматриваемая жидкость на самом деле является сжимаемой. Более того, сам вид уравнения диффузии плотности на это указывает. Ведь, по определению (см., напр., [20, 21]), среда называется несжимаемой, если любой ее индивидуальный объем не меняется во время движения, или, другими словами,

$$d_t \rho = 0. \tag{21}$$

Во-вторых, используемые в геофизических задачах и в модели Линейкина, в частности, уравнения движения (Навье—Стокса или Рейнольдса) сами получены в предположении несжимаемости среды [15, 17]. То, что здесь эти уравнения используются совместно с уравнением неразрывности сжимаемой среды, фактически означает, что тензор вязких напряжений определяется нестандартным образом (оказывается пропорциональным градиенту скорости, а не симметричной его части), хотя, по-видимому, ни у Линейкина, ни у других авторов такого намерения не было.

Таким образом, во всех обсуждаемых случаях в действительности решались не те задачи, которые были объявлены. Это, разумеется, не означает, что фактически использовавшиеся приближения автоматически оказываются плохими, просто они не совпадают с указанными явно при формулировке задач и требуют, вообще говоря, иного обоснования.

Следует ли в силу указанных противоречий исключить уравнение диффузии плотности из рассмотрения? С нашей точки зрения, напротив, его следует включать в систему уравнений вязкой/турбулентной жидкости, но на иных основаниях. Во-первых, механизм диффузии (в частности, плотности массы) представляется весьма общим и не связан жестко с линейностью уравнения состояния, как это имеет место в выводе Линейкина. Во-вторых, поскольку диффузия — это один из механизмов переноса, кажется разумным рассматривать оба механизма, и конвективный, и диффузионный в рамках одного уравнения, как это делается во всех остальных эволюционных уравнениях гидродинамики. Кроме того, такие диффузионные потоки естественно появляются в уравнениях сохранения массы компонент смеси [20, 23].

Таким образом, на наш взгляд уравнение диффузии плотности следует рассматривать как обобщение уравнения неразрывности, и оно должно использоваться вместо него в системе уравнений, как это делается и у других авторов, рассматривавших подобные обобщения. Кроме того, вывод уравнения диффузии плотности не должен опираться на линейность уравнения состояния, поскольку это создает ложное представление о том, что механизм переноса плотности массы не является общим. Выше и была сделана попытка обосновать такое заключение и предложить новый вариант вывода уравнения.

4. Упрощения, связанные с применением уравнения диффузии плотности к плохо сжимаемым средам, уже не столь однозначны, как при использовании уравнения неразрывности. Дело в том, что несжимаемость (21) теперь не означает бездивергентности поля скорости. Если модель среды основана на уравнениях Навье—Стокса или Рейнольдса, то она описывает бездивергентное течение среды с уравнением баланса массы вида (15) т. е. течение сжимаемой жидкости.

5. Использованный в (11) способ описания слагаемого $\left\langle \rho' \vec{v}' \right\rangle$ достаточно прост и широко применяем, однако, не единственно возможный (см., например, [15]).

В заключение хочу выразить признательность коллегам Н. Е. Вольцингеру, Б. А. Кагану и А. С. Сафраю за помощь в работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Слезкин Н. А.* О дифференциальных уравнениях вязкого газа // ДАН СССР. 1951. Т. 77. С. 205.
2. *Валландер С. В.* Уравнения динамики вязкого газа // ДАН СССР. 1951. Т. 78. С. 25
3. *Шапошников И. Г.* К вопросу об учете диффузионных явлений в уравнениях гидродинамики // ЖЭТФ. 1951. Т. 21 (11). С. 1309—1310.
4. *Шапошников И. Г.* О некоторых гидродинамических величинах для смеси // УФН. 1952. Т. XLVIII (1). С. 119—122.
5. *Климонтович Ю. Л.* Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
6. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995.
7. *Алексеев Б. В.* Обобщенная больцмановская физическая кинетика // Теплофизика высоких температур. 1997. Т. 35 (1). С. 129—146.
8. *Елизарова Т. Г., Шеретов Ю. В.* Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41 (2). С. 239—255.
9. *Елизарова Т. Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
10. *Линейкин П. С.* Основные вопросы динамической теории бароклинного слоя моря. Л.: Гидрометеоиздат, 1957.
11. *Belevich M.* Causal description of heat and mass transfer // J. Phys. A: Math Gen. 2004. T. 37. P. 3053—3069.
12. *Pietrafesa L. J., Janovitz G. S.* On the effects of boyancy flux on continental shelf circulation // J. Phys. Oceanogr. 1979. V. 9. P. 911—918.
13. *Alekseev G. V., Johannessen O. M., Kovalevskii D. V.* Development of Convective Motions under the Effect of Local Perturbations of Sea-Surface Density // Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics. 2001. V. 37 (3). P. 341—350.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: УРСС, 2006.
15. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1965. Т. 1.
16. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости / Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
17. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1.
18. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
19. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: УРСС, 2003.
20. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1.
21. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
22. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости / Пер. с англ. 2-е изд., стер. М.–Ижевск: РХД, 2001.
23. *Каменкович В. М.* Основы динамики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1973.

Статья поступила в редакцию 01.09.2015 г.