

УДК 551.468

© Н. Е. Вольцингер<sup>1</sup>, А. А. Андросов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия

<sup>2</sup>Институт полярных и морских исследований им. Альфреда Вегенера, Бремерхафен, Германия  
lenna30@mail.ru

## НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ПРОЛИВОВ МИРОВОГО ОКЕАНА

Обсуждаются возможности и ограничения моделирования негидростатической динамики проливов Мирового океана согласно предлагаемой классификации. Проливы подразделяются по типовому признаку целесообразности учета динамического давления во всей области пролива либо его подобласти, руководствуясь как общими представлениями, исходя из морфометрических, динамических и гидрологических особенностей пролива, так и простыми критериями выявления негидростатики. Модель пролива строится на основе постановки краевой задачи для уравнений динамики и конститuentов плотности в произвольной трехмерной области с двумя противостоящими открытыми границами. Уравнения модели преобразуются к гранично-согласованным криволинейным координатам, отображающим физическую область пролива на вычислительный параллелепипед. Численная реализация использует геофизическую модификацию проекционного метода решения уравнений Навье—Стокса; при этом разностная краевая задача интегрируется расщеплением по координатным направлениям при аппроксимации адвекции схемой повышенного порядка точности с присоединенной процедурой TVD. Определение негидростатической компоненты давления, требующее основных вычислительных затрат, выполняется решением уравнения Пуассона для оператора Лапласа—Бельтрами; реализация негидростатического модуля использует сочетание прогонки по вертикали с итерационным методом верхней релаксации по горизонтали. Результаты содержат оценку влияния негидростатики на динамический и гидрологический режимы трех выделенных типовых проливов: Мессинского, Гибралтарского и Баб-эль-Мандебского.

**Ключевые слова:** пролив, гидростатика/негидростатика, краевая задача, криволинейные координаты, проекционный метод, сравнительные оценки.

*N. E. Voltzinger<sup>1</sup>, A. A. Androsov<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Saint-Petersburg Department of the P. P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, St.-Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Alfred Wegener Institute for Polar and Marine Studies, Bremerhaven, Germany

## NONHYDROSTATIC DYNAMICS OF STRAITS OF THE WORLD OCEAN

Opportunities and restrictions of modeling of nonhydrostatic dynamics of straits of the World Ocean according to the offered classification are discussed. Straits can be subclassified on a standard basis of expediency account of the dynamic pressure in the whole area of the strait or a subdomain, guided both by common ideas, based on morphometric, hydrological and dynamic characteristics of the strait and simple criteria identifying nonhydrostatic. The boundary-value problem for the equations of momentum, continuity, turbulent closure and evolution of water constituents is formulated in an arbitrary 3D domain with two open boundaries. For solution, we use a transfer to the horizontal boundary-fitted coordinates and vertical  $\sigma$ -coordinate mapping the physical domain onto a computational parallelepiped with two opposite open sides. Numerical realization uses geophysical modification of a two-step projective method of the solution of the Navier—Stokes equations. Results contain an assessment of influence of nonhydrostatic on the dynamic and hydrological regimes of three allocated standard straits: Messina, Gibraltar and Bab-el-Mandeb.

**Key words:** strait, hydrostatic-nonhydrostatic, boundary-value problem, curvilinear coordinate, projective methods, comparative estimation.

**Общие положения. Состояние вопроса.** Первоосновой классификации многообразия океанических явлений выступает отношение их характерных масштабов: вертикального  $H$  и горизонтального  $L$ . По значению  $\varepsilon = H/L$  определяют принадлежность движения к одному из двух классов: гидростатическому и негидростатическому. В первом случае при гидродинамическом моделировании предполагается допустимость пренебрежения вертикальным ускорением в уравнении движения по вертикали, что выражает

*Вольцингер Н. Е., Андросов А. А.* Негидростатическая динамика проливов Мирового океана // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 1. С. 26—40.

*Voltzinger N. E., Androsov A. A.* Nonhydrostatic dynamics of straits of the World Ocean. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika*. 2016, 9, 1, 26—40.

баланс между статическим давлением и полем плотности. Во втором случае уравнение движения по вертикали не редуцируется, что определяет динамическую поправку к гидростатическому давлению.

В этом смысле можно говорить, что значение  $\varepsilon$  устанавливает связь между масштабами движения и давлением — важнейшей, после энергии, физической характеристикой среды. И действительно, при разложении уравнений Эйлера в ряд по степеням  $\varepsilon^2$  — числу Фридрикса, первое приближение дает гидростатические двумерные уравнения мелкой воды, а второе приближение содержит дисперсионную (динамическую) поправку к давлению [1].

Моделирование на основе трехмерных гидростатических (примитивных) уравнений включает совокупность крупномасштабных явлений с  $\varepsilon \leq O(10^{-2})$ ; к ним относятся приливы, океанские круговороты, глобальная циркуляция в океанах и другие явления, близкого к планетарному масштаба. Класс негидростатических движений содержит гравитационные волны, глубоководную конвекцию, мезомасштабные вихри и другие явления с  $\varepsilon \geq O(10^{-2})$ .

Растущее число работ по моделированию явлений на негидростатическом масштабе выражает повышение интереса к развитию этого направления. Сюда относятся, если ограничиться небольшим числом ссылок, работы по моделированию бароклинной неустойчивости [2], глубоководной конвекции [3, 4], мезомасштабной циркуляции [5], гравитационных течений над наклонным дном [6, 7], внутренних волн [8—10], баротропно-бароклинного взаимодействия [11], нелинейно-дисперсионного взаимодействия поверхностных волн [12, 13], процессов длинноволнового наката, схода оползня и генерируемого им волнового поля [14—18].

Выбор в пользу негидростатической модели естественен при отношении характерных масштабов  $\varepsilon > O(10^{-2})$  и столь же мотивирован отказ от нее при  $\varepsilon < O(10^{-2})$  в силу высокой точности гидростатического моделирования крупномасштабных процессов. Между этими двумя классами движений есть место для относительно крупномасштабных длинноволновых движений и взаимодействующих с ними негидростатических движений меньшего масштаба. Такая ситуация типична для проливов Мирового океана.

Объектами трехмерного негидростатического моделирования являются проливы с изменчивой морфометрией, резким перепадом глубин, с активной динамикой, водоворотами, разнонаправленными течениями, определяющими динамическую компоненту давления. К ним относятся отдельные проливы, проливы островных дуг, (Зондская, Курильская, Алеутская и др.), проливы фиордных районов (Мальстрём, Сальтстрём и др.), проливы коралловых регионов и архипелагов.

Влияние негидростатики относительно слабее сказывается на нулевой гармонике приливных колебаний, и баротропные приливы в проливах хорошо описываются в гидростатическом приближении, особенно когда эпюра скорости близка к однородной по глубине. Однако если жидкость стратифицирована, как почти всегда и бывает в проливах, поскольку воды граничных бассейнов различны по своим гидрологическим характеристикам, то трехмерное негидростатическое моделирование существенно необходимо для адекватного представления внутреннего прилива. Гидростатическое описание внутренних волн означает пренебрежение дисперсионными эффектами в их эволюции, усилению роли нелинейности, ведущей к увеличению крутизны и разрушению волн. В той же мере учет негидростатики необходим при моделировании биохимических процессов в стратифицированной жидкости. Внутренние волны, осуществляя перенос химических соединений, органики и примесей в столбе воды, способствуют их перемешиванию и определяют режим экосистем [19].

**Моделирование негидростатической динамики пролива.** Реализация трехмерных негидростатических моделей обычно основывается на численных методах решения краевых задач для уравнений Навье—Стокса. Широко используемый проекционный метод решения таких задач имеет двухэтапную процедуру. На первом этапе определяется промежуточное решение, на втором — это решение корректируется так, чтобы оно удовлетворяло уравнению неразрывности путем нахождения динамической поправки к давлению решением краевой задачи для уравнения Пуассона. Этот второй этап является наиболее трудоемким. По вычислительным затратам в зависимости от размеров области он может многократно и даже на порядки превосходить затраты на реализацию предиктора. Особенность задачи состоит в том, что динамическая поправка к давлению на несколько порядков меньше его главной части — гидростатической компоненты — и ее нахождение требует высокого сеточного разрешения. Так, например, негидростатическое моделирование динамики шельфа Мирового океана требует такого увеличения вычислительных затрат по сравнению с использованием примитивных уравнений, которое делает недостижимым решение этой задачи даже в отдаленном будущем без использования параллельных вычислений.

Оценим вычислительные затраты на реализацию гидростатической краевой задачи в области пролива на сетке, содержащей  $10^5$  узлов. Такое разрешение используется в приводимых ниже модельных расчетах. Для задания девяти компонентов решения — полей скорости, уровня, температуры, солености, плотности, характеристик турбулентности и метрики в каждом узле требуется задание  $9 \cdot 10^5$  чисел, а расчет суммарного прилива суточных и полусуточных гармоник с интервалом, скажем, 10 мин увеличивает этот ансамбль до  $O(10^8)$  чисел. Для получения решения и его обработки нужно выполнить  $O(10^2)$  арифметических операций; для сходимости периодических решений требуется расчет около 10 циклов приливной волны. Таким образом, расчет одного приливного периода требует  $O(10^{11})$  арифметических операций. Для машины с производительностью  $O(10^9)$  операций/с такой расчет занимает несколько минут.

Дальнейший переход к реализации негидростатического модуля требует увеличения пространственно-временного сеточного разрешения хотя бы на порядок; для сходимости решения в каждом узле требуется около 10 итераций. Дальнейшие затраты придутся на пересчет поля скорости. Таким образом, реализация полной трехмерной негидростатической задачи требует  $O(10^{11}-10^{14})$  арифметических операций, т. е. нескольких часов машинного времени. Отсюда следует, что моделирование динамики относительно небольших проливов на сетке порядка миллиона узлов при удачном выделении подобластей негидростатики можно выполнить при использовании однопроцессорной вычислительной системы, тогда как моделирование проливов большей протяженности или большей глубины, как, например, проливы Малакский или Ломбок, а тем более проливы архипелагов, требуют параллельных вычислений.

Решение негидростатической краевой задачи во всей области пролива зачастую нерационально ввиду значительного усложнения алгоритма и вычислительных затрат. Вместе с тем было замечено, что эффекты негидростатики в приливной динамике диапазона  $\varepsilon = O(10^{-3})$  проявляется локально и в отдельные интервалы времени [11, 20]. В работе [8] предложен способ выделения таких подобластей путем оценки вертикального ускорения, когда сама вертикальная скорость определяется из уравнения неразрывности в гидростатической постановке. Более непосредственный подход к выделению подобластей негидростатики, когда на всех открытых границах задаются условия из решения в расширенной области, представлен в [21]. Ввиду очевидной важности учета негидростатики там, где она существенно определяет особенности динамики пролива, представляется весьма полезным нахождение общих критериев выделения из области пролива подобластей негидростатики. Такие критерии должны определяться морфометрическими, динамическими и гидрологическими характеристиками пролива, а алгоритм композиционной модели должен обеспечить непрерывность решения на границах подобластей.

С точки зрения рационального моделирования негидростатической динамики проливов их можно разделить на три типа. Первый тип — проливы с доминирующей подводной горой, как, например, Мессинский — между Калабрией и о. Сицилия, или Ломбок — соединяющим море Бали с Индийским океаном, подобный по морфометрическим характеристикам Мессинскому, увеличенному в полтора раза, или Юкатанский, соединяющий Мексиканский залив с Карибским морем. В этом случае легко установить критерий негидростатики, а выделение ее подобласти не требует сращивания решений на границе и выполняется сквозным счетом. Ко второму типу относятся проливы с изрезанным рельефом, порогами и узкостями, определяющими изменчивость градиентов поля скорости, формирующих динамическую поправку к статическому давлению. Внутренняя динамика таких проливов позволяет определить показатель негидростатики, однако выделение ее подобласти требует осторожности, ибо граница может оказаться в зоне неустойчивости течения, что чрезвычайно усложнит сращивание решения полной задачи в подобласти с решением примитивных уравнений. Примером проливов такого типа может служить Гибралтарский пролив, или Флоридский пролив между Кубой и Флоридой, или Бассов пролив между Австралией и Тасманией. К третьему типу, наиболее распространенному, относятся проливы, рельеф которых содержит структурные элементы каждого из двух типов, как, например, Баб-эль-Мандебский, соединяющий Красное море с Аденским заливом, или Магелланов пролив с множеством узкостей и островов, или Торресов пролив между Австралией и новой Гвинеей с его коралловыми островами и подводными рифами. Выделение подобластей в таких проливах вряд ли целесообразно и их надо моделировать целиком в негидростатической постановке. При всей условности такой классификации она может облегчить выбор между повышением точности модели пролива и допустимыми вычислительными затратами.

В следующем разделе приводятся критерии негидростатики для проливов первых двух типов. Далее рассматривается постановка негидростатической краевой задачи в гранично-согласованных координатах, приводится геофизическая модификация проекционного метода решения преобразованной задачи, моделируются динамика и гидрология трех проливов различных типов и оцениваются отклонения от гидростатики их характеристик. В заключение обсуждаются результаты и приводятся выводы по работе.

**Выделение подобластей негидростатики в проливе.** Из рассмотрения уравнения движения по вертикали с масштабом горизонтальной скорости  $U$  и частотой плавучести  $N = (-g\rho_z/\rho_0)^{1/2}$ , где  $g$  — гравитационное ускорение,  $\rho$  — плотность,  $\rho_0$  — ее отсчетное значение, следует, что вертикальным ускорением частиц жидкости можно пренебречь и давление будет гидростатическим, если

$$\frac{U^2}{L^2 N^2} \ll 1 \text{ или } \Gamma = \varepsilon^2 / \text{Ri} \ll 1, \quad (1)$$

где  $\text{Ri} = N^2 H^2 / U^2$  — число Ричардсона [2].

Критерий приемлемости гидростатики справедлив в той мере, в какой характерные масштабы имеют присущий им смысл. При выраженном изменении рельефа дна, как в случае подводной горы, характерные масштабы утрачивают глобальный характер; глубина в области горы быстро изменяется, а длина набегающей длинной волны уменьшается. В таких условиях выражает уже не соотношение характерных масштабов, а уклон:  $\varepsilon = H/L = \text{tg}\alpha$ ; при этом значения  $\Gamma$  возрастают. Другим фактором роста  $\Gamma$  является то, что само понятие характерной глубины на горном рельефе должно быть заменено на локальную склоновую глубину  $h_*(x, y)$ . Пусть  $h_0$  — глубина над вершиной горы,  $h$  — глубина у ее подошвы, тогда  $h_0 \leq h_* \leq h$ . При этом критерий (1) на горном склоне трансформируется к виду:

$$\gamma = \frac{U^2}{N^2 h_*^2} \text{tg}^2 \alpha = O(1). \quad (2)$$

Возросшие значения  $\gamma$  уже не могут служить оправданием пренебрежения вертикальным ускорением и определяют в какой мере необходим учет негидростатического фактора.

Другая ситуация, когда можно предполагать целесообразность учета динамической компоненты давления в некоторой подобласти пролива подсказывается выраженной неоднородностью этой подобласти, содержащей изменчивую глубину, узкости и пороги, формирующие рост вертикальной скорости, фронты и другие особенности структуры полей. В таких случаях количественной оценкой целесообразности выделения подобластей негидростатики может, до некоторой степени, служить оценка соотношений безразмерных параметров в уравнениях модели.

Пусть невозмущенная поверхность воды совпадает с горизонтальной плоскостью  $XOY$  правой декартовой системы координат, ось  $OZ$  направлена вертикально вверх. В области  $Q = Q \times [0, T]$ , где  $Q$  — трехмерная область, ограниченная свободной поверхностью воды  $\zeta(x, y, t)$ , дном  $h(x, y)$  и боковой поверхностью  $\partial Q$ ,  $Q = \{x, y, z; x, y \subset \Omega, -h \leq z \leq \zeta\}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , рассмотрим уравнения движения и неразрывности:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla_3 p + 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{g} + \nabla(K\nabla\mathbf{u}) + (\mathbf{v}\mathbf{u}_z)_z, \quad (3)$$

$$\text{div}\mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

где  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla_3$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, w)$ ,  $\mathbf{v} = (u, v)$ ,  $\nabla_3 = (\nabla, \partial/\partial z)$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  — вектор гравитационного ускорения; для составляющих силы Кориолиса примем:  $2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} = (f_\Gamma w - f v, f u, -f_\Gamma u)$ ,  $f_\Gamma = 2\tilde{\Omega} \cos \varphi$  — ее горизонтальная компонента,  $f = 2\tilde{\Omega} \cos \varphi$  — вертикальная компонента,  $\tilde{\Omega}$  — вектор угловой скорости вращения Земли,  $\varphi$  — широта места;  $K, v$  — коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена.

Примем:  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $\rho' \ll \rho_0$ ,  $\rho_0$  — отсчетное значение плотности. Редукция уравнения движения по вертикали к виду

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (5)$$

определяет гидростатическое давление  $p_\Gamma$ . Интегрируя (5) по вертикали, имеем:

$$p_\Gamma = p|_\zeta + g\rho_0(\zeta - z) + g \int_z^\zeta \rho' dz,$$

откуда, при  $p|_{\zeta} = \text{const}$ :

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p_{\Gamma} = g \nabla (\zeta + I), \quad I = \int_z^{\zeta} \rho' / \rho_0 dz,$$

что определяет градиент динамического давления как сумму своих баротропного и бароклинного градиентов.

В уравнении (3) примем:

$$p = p_{\Gamma} + q,$$

$q$  — динамическое давление. С учетом (5) имеем:

$$\frac{1}{\rho} p_z + g \approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) p_z + g \approx \frac{1}{\rho_0} p_z + g \frac{\rho'}{\rho_0} + g = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (p_{\Gamma} + q) - \frac{p_{\Gamma z}}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} q_z.$$

Запишем уравнение движения для вектора  $(\mathbf{v}, w)$  в виде:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + w \mathbf{v}_z + g \nabla \zeta + \frac{1}{\rho_0} \nabla q + g \nabla I = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f \mathbf{v} - f_{\Gamma} w \\ -f u \end{pmatrix} + \nabla (K \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \mathbf{v}_z)_z, \quad (6)$$

$$w_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w + w w_z + \frac{1}{\rho_0} q_z = F_3 \equiv f_{\Gamma} u + \nabla (K \nabla w) + (\mathbf{v} w_z)_z. \quad (7)$$

Приведем уравнения к безразмерному виду, выбрав для негидростатического моделирования масштабы подобласти Гибралтарского пролива от Камариальского порога до Тарифской узкости. При этом  $H = 5 \cdot 10^2$  м,  $L = 10^4$  м и  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ . Введем безразмерные переменные:

$$\tilde{x} = x/L, \quad \tilde{y} = y/L, \quad \tilde{z} = z/H, \quad \tilde{t} = t c_0 / L,$$

$c_0^2 = g'H$ ,  $g' = gr_1$ ,  $\tilde{u} = u/c_0$ ,  $\tilde{v} = v/c_0$ ,  $\tilde{w} = w/w_0$ ,  $\tilde{\zeta} = \zeta/\zeta_0$ ,  $r_1 = \rho'/\rho_0$  — относительная мера отклонений плотности,  $\tilde{I} = I/I_0$ ,  $I_0 = gHr_1$ .

Для определения масштаба  $w_0$  используем уравнение плавучести в виде:

$$b_t + N^2 w = 0$$

$b = -gr_1$ ,  $N^2 = \tilde{N}^2 N_0^2$ ,  $N_0^2 = -gr_2/H$ ,  $r_2 = \delta\rho/\rho_0$  — относительная мера изменения стратификации.

Тогда  $w_0 = g \frac{c_0}{LN_0^2} r_1$ , а масштаб  $q_0$  определим из редукции (7):

$$w_t + q_z = 0.$$

(Здесь и далее  $q$  означает  $q/\rho_0$ , а  $p$  —  $p/\rho_0$ ). Имеем:  $q_0 = g \frac{c_0^2 H}{L^2 N_0^2} r_1$ .

Запишем первое из уравнений (6) в безразмерном виде, опустив тильду:

$$u_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) u + \frac{gr_1}{HN_0^2} w u_2 + \frac{g\zeta_0}{c_0^2} \zeta_x + \frac{gHr_1}{c_0^2} I + \frac{gHr_1}{L^2 N_0^2} q_x = \frac{L}{c_0^2} F_1.$$

Оценим масштабные соотношения для условий выделенной подобласти Гибралтарского пролива. При  $r_1 = 8 \cdot 10^{-4}$ ,  $r_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\zeta = 0.8$  м получим:  $N_0^2 = 10^{-4} \text{ с}^{-2}$ ,  $c_0 = 2$  м/с,  $w_0 = 1.6 \cdot 10^{-2}$  м/с,  $q_0 = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}^2$  и  $gr_1/HN_0^2 = 0.2$ ,  $g\zeta_0/c_0^2 = 2$ ,  $gHr_1/L^2 N_0^2 = 4 \cdot 10^{-4}$ . Для отношения масштабных коэффициентов при градиентах динамической и статической (баротропной) компонент давления имеем:

$$G = \frac{gHr_1^2 c_0^2}{L^2 N_0^2 g \zeta_0} = R / Ur,$$

где  $R = r_1^2/r_2$ ,  $Ur = \zeta_0 L^2 / H^3$  — число Урседа. При  $Ur = O(1)$  нелинейные и дисперсионные эффекты уравновешиваются. В данном случае  $Ur \approx 0.64$ , что указывает на присутствие динамической компоненты давления, которая выступает в виде дисперсионной поправки к статическому давлению во втором приближении при разложении уравнений Эйлера по степеням  $\varepsilon^2$ ; при этом величина  $R \approx 10^{-4}$  позволяет оценить роль гидрологического фактора.

Наблюдения действительно подтверждают формирование в этом месте пролива диспергирующих пакетов волн, движущихся к Средиземному морю. Заметим, что аналогичные эффекты негидростатики проявляются и в Мессинском проливе на северном плече подводной горы для совсем других значений параметров: при глубине  $\sim 150$  м, на отрезке плеча  $\sim 5$  км и  $\zeta \approx 10$  см число  $Ur \approx 1$ . Образование здесь солитонов, движущихся к Тирренскому морю, подтверждаются космическими наблюдениями [22].

Для проливов рассмотренных типов подход к выбору подобластей негидростатики различен, но в любом случае он подчинен требованию непрерывности решения на границах подобластей. При этом оказывается, что в первом случае решение полных и примитивных уравнений не требует сращивания в любом месте, если склоны подводной горы достаточно равномерны. Во втором случае подобласти выбираются в зонах наиболее изрезанного рельефа и, как показывает пример и приводимые ниже результаты, такой непосредственный выбор оправдан. Вместе с тем изменчивость полей динамических и гидрологических характеристик наряду с возможной бароклинной неустойчивостью на границах подобластей может потребовать сращивания решений полной и гидростатической задач.

**Постановка задачи.** Добавим к уравнениям (3), (4) уравнения для конstituентов плотности и состояния морской воды:

$$\frac{d\Theta_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} v_{\Theta_i} \frac{\partial \Theta_i}{\partial z} + \nabla \cdot (K_{\Theta_i} \nabla \Theta_i), \quad (8)$$

$$\rho(x, y, z; t) = \rho(\Theta_i), \quad (9)$$

$i = 1, 2$ ;  $\Theta_1$  — температура,  $\Theta_2$  — соленость;  $v_{\Theta_i}$ ,  $K_{\Theta_i}$  — коэффициенты турбулентного диффузионного обмена.

К системе уравнений (3), (4), (8), (9) относительно неизвестных ( $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $\Theta_i$ ) следует присоединить турбулентное замыкание для нахождения коэффициентов  $v$ ,  $v_{\Theta_i}$ ,  $K$ ,  $K_{\Theta_i}$  и уравнения для определения уровня  $\zeta$ ; эта компонента решения определяется из вертикально-осредненных уравнений горизонтального движения и уравнения неразрывности.

**Краевая задача в гранично-согласованных координатах.** Преобразуем уравнения к криволинейным координатам

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \sigma = H^{-1}(z - \zeta), \quad t' = t \quad (10)$$

$H = h + \zeta$  с якобианом преобразования  $J^{-1} = \partial(\xi, \eta, \sigma)/\partial(x, y, z)$ ,  $0 \neq J^{-1} < \infty$ ,  $J = J_* H$ ,  $J_* = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)$  — плоский якобиан. При соответствующем выборе четырех попарно противоположных участков боковой поверхности область  $Q$  отобразится на параллелепипед  $Q^*$ . Пусть физическая область  $Q$  представляет пролив с береговыми непроницаемыми границами  $\partial Q_1$ , отображаемыми на непроницаемые грани параллелепипеда  $\partial Q_1^*$  и с открытыми границами  $\partial Q_2$  отображаемыми на его открытые грани  $\partial Q_2^*$ ; нижней и верхней горизонтальными гранями параллелепипеда  $Q^*$  будут прямоугольники  $\Omega^*$  в плоскостях соответственно  $\sigma = -1$  и  $0$ .

Уравнение (3) в гранично-согласованных координатах (10) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \Pi = \underline{\varphi}, \quad \Pi = (p, p, q), \quad (11)$$

$$\underline{\varphi} = (\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w) = -U^i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} - W \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} - 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} + H^{-2} (\mathbf{v} \mathbf{u}_\sigma)_\sigma + J_*^{-1} (K J_* g^{ik} \mathbf{u}_{\xi^k})_{\xi^i}.$$

Здесь  $U^i = \mathbf{v} \nabla \xi^i$  — контравариантные горизонтальные скорости,  $\nabla \xi^i = \mathbf{e}^i = (\xi_x^i, \xi_y^i)$  — контравариантный базисный вектор;  $i, k = 1, 2$  при суммировании по повторяющемуся индексу;  $U^1 = U$ ,  $U^2 = V$ ,  $\xi^1 = \xi$ ,  $\xi^2 = \eta$ ;  $W = \sigma_t + \mathbf{v} \nabla_2 \sigma + w \sigma_z$  — контравариантная вертикальная скорость,  $\nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ ,  $g^{ik} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k$  — компоненты метрического тензора.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} J U^i + \frac{\partial}{\partial \sigma} J (W - \sigma_t) = 0. \quad (12)$$

Гидростатические уравнения горизонтального движения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p_\Gamma = \underline{\varphi}_v, \quad \underline{\varphi}_v = (\varphi_u, \varphi_v), \quad (13)$$

К динамической задаче (11), (12) присоединяются вертикально-осредненные уравнения для определения уровня. Аналогично преобразуется уравнение (8). Замыкание для нахождения  $v$ ,  $v_{\Theta_i}$  использует уравнение кинетической энергии турбулентности, соотношения подобия и модифицированную формулу Монтомгери для масштаба турбулентности [23].

**Граничные и начальные условия.** Пусть непроницаемые боковые грани  $\partial Q_1^*$  параллелепипеда  $Q^*$  лежат в плоскостях  $\xi = \text{const}$ , а его открытые грани — в плоскостях  $\eta = \text{const}$ . Тогда:

$$U|_{\partial Q_1^*} = 0 .$$

На открытых границах  $\partial Q_2^*$  на вытоке используется линейная экстраполяция характеристической переменной — контравариантной компоненты скорости  $V$ . На втоке задается необходимая информация о компонентах скорости:

$$U|_{\partial Q_2^*} = \Psi_1(\xi, \sigma; t), V|_{\partial Q_2^*} = \Psi_2(\xi, \sigma; t)$$

и, при удержании горизонтального обмена,  $K\partial V/\partial n$ , где  $\partial/\partial n = (g^{21})^{-1/2} g^{2i} \partial/\partial \xi^i$  — производная по нормали.

Граничными условиями по вертикали являются: условие прилипания у дна на высоте параметра шероховатости  $\varepsilon^*$  и динамическое условие на касательное напряжение  $\tau/\rho_0$ :

$$U^i|_{\sigma=-1+\varepsilon^*} = 0, \nu U^i|_{\sigma=0} = H \nabla \xi^i \tau / \rho_0 .$$

Для уравнений температуры и солёности  $\Theta_i$  на непроницаемой границе ставится нулевая производная по нормали, на открытой границе при вытоке — экстраполяция из области, а при втоке — характеристики входящей водной массы. На поверхности для  $\Theta_1 = T$  задаются радиационные потоки тепла, а для  $\Theta_2 = S$  — соотношение между осадками и испарением.

Начальными условиями являются бездивергентный вектор скорости  $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0$  и значения конституентов  $\Theta_i|_{t=0} = \Theta_i^0$ .

**Численный метод решения негидростатической задачи.** Присоединим к гидростатическим уравнениям (13) уравнение

$$\tilde{w}_t = \varphi_w . \quad (14)$$

Пусть на временном шаге  $(k+1)\tau$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $\bar{k} = [T^*/\tau]$  известно решение задачи (13), (14) для  $\mathbf{u}_\Gamma = (u, v, \tilde{w})$ , которое будем рассматривать как предиктор разностного уравнения (11):

$$\mathbf{u}_\Gamma^{k+1} = \mathbf{u}^* ,$$

определяемый из уравнений

$$\frac{(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^k)}{\tau} + \nabla p_\Gamma^* = \underline{\varphi}_v^* , \quad \frac{(w^* - w^k)}{\tau} = \varphi_w^* . \quad (15)$$

Для решения гидростатической краевой задачи — первого из уравнений (15), уравнения неразрывности (12) и уравнений для  $\Theta_i$  с приведенными граничными условиями используется расщепление операторов по координатным направлениям со вторым порядком точности и величиной шага по времени, определяемым только адвективной модой, с процедурой TVD, контролирующей решение в области его резких градиентов и многосеточной процедурой ускорения сходимости [23]. Алгоритм решения негидростатической задачи опирается на гидростатический модуль и является модификацией проекционного метода решения уравнений Навье—Стокса.

Вычитая уравнения (15) из аппроксимации уравнения (11):

$$\frac{(\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k)}{\tau} + \nabla (p_\Gamma^* + q^{k+1}) = \underline{\varphi}_v^* , \quad \frac{(w^{k+1} - w^k)}{\tau} + \frac{\partial q^{k+1}}{\partial \sigma} = \varphi_w^*$$

имеем:

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*)}{\tau} + \nabla q^{k+1} = 0$$

или в проекциях:

$$\frac{(u^{k+1} - u^*)}{\tau} + q_{\xi^i}^{k+1} \xi_x^i + q_\sigma^{k+1} \sigma_x = 0 , \quad \frac{(v^{k+1} - v^*)}{\tau} + q_{\xi^i}^{k+1} \xi_y^i + q_\sigma^{k+1} \sigma_y = 0 , \quad \frac{(w^{k+1} - w^*)}{\tau} + q_\sigma^{k+1} \sigma_z = 0 .$$

Умножим первое из этих уравнений на  $\xi_x^i$ , второе — на  $\xi_y^i$  и сложим их; затем сложим первое уравнение, умноженное на  $\eta_x$  со вторым, умноженным на  $\eta_y$ ; наконец, сложим первое уравнение, умноженное на  $\sigma_x$ , второе, умноженное на  $\sigma_y$  и третье — на  $\sigma_z$ . Имеем:

$$\frac{(U^{k+1} - U^*)}{\tau} + g^{1i} q_{\xi^i}^{k+1} + g^{13} q_\sigma^{k+1} = 0 , \quad \frac{(V^{k+1} - V^*)}{\tau} + g^{2i} q_{\xi^i}^{k+1} + g^{23} q_\sigma^{k+1} = 0 , \quad \frac{(\tilde{W}^{k+1} - \tilde{W}^*)}{\tau} + g^{3i} q_{\xi^i}^{k+1} + g^{33} q_\sigma^{k+1} = 0 \quad (16)$$

$\tilde{W} = W - \sigma_t$ . Умножая каждое из этих уравнений на  $J$  и дифференцируя первое по  $\xi$ , второе – по  $\eta$ , третье – по  $\sigma$  и складывая их, получим:

$$\left( J g^{ij} q_{\xi^i}^{k+1} \right)_{\xi^j} = \left[ (JU^*)_{\xi} + (JV^*)_{\eta} + (J\tilde{W}^*)_{\sigma} \right] / \tau, \quad (17)$$

где учтено, что согласно (12)  $\text{div} \mathbf{U}^{k+1} = 0$ .

Уравнение Пуассона для оператора Лапласа—Бельтрами (17) решается итерационно, сочетая на каждом цикле итераций прогонку по вертикали с верхней релаксацией в плоскости  $(\xi, \eta)$ , при граничных условиях по вертикали и на боковых непроницаемых гранях параллелепипеда  $Q^*$ :

$$\left. \frac{\partial q}{\partial n} \right|_{\sigma=-1} = 0, \quad q|_{\sigma=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial q}{\partial n} \right|_{\partial Q_1^*} = 0. \quad (18)$$

На открытых гранях:

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \chi(\xi, \sigma, t), \quad (19)$$

где, согласно (16),  $\Psi^{k+1} = -(V^{k+1} - V^*) / \tau \sqrt{g^{22}}$  назначается в итерационном процессе на каждом цикле с предыдущей итерации  $s$ :

$$\Psi^{k+1,s} = -(V^{k+1,s} - V^*) / \tau \sqrt{g^{22}}, \quad s = 1, 2, 3 \dots$$

Решением задачи (17)—(19) определяется динамическое давление, по градиенту которого из (16) находится негидростатический вектор скорости  $\mathbf{U}^{k+1} = (U, V, \tilde{W})$ , а затем и декартова скорость из соотношений:  $u = J_* (U \eta_y - V \xi_y)$ ,  $v = J_* (V \xi_x - U \eta_x)$ ,  $w = H (\tilde{W} - u \sigma_x - v \sigma_y)$ .

**Результаты моделирования негидростатической длинноволновой динамики проливов.** Для определения роли негидростатики и характера ее проявлений выполним моделирование динамики ряда проливов, требующее различного подхода к оптимальному выбору между выделениями подобластей негидростатики и дополнительными вычислительными затратами.

Наряду с непосредственными количественными оценками особое значение имеет выявление особенностей, обязанных учету негидростатики в энергетических циклах приливных волн и в структуре гидрологических полей. Результаты должны опираться на всестороннюю проверку точности, эффективности и достоверности моделей самых разных проливов.

На деле выполнение такой программы в полном объеме превосходит наши намерения. Мы продвигаемся ровно настолько, чтобы оценить некоторые эффекты негидростатики на примерах трех выбранных проливов: Мессинского, Гибралтарского и Баб-эль-Мандебского, проверить сходимость численных решений полной задачи, и ее негидростатического модуля, и попытаться наметить рекомендации для выделения подобластей негидростатики.

Оценку отклонений рассчитанных гидрофизических характеристик от их гидростатических значений удобно представить в максимальной и среднеквадратичной нормах. Пусть  $\delta(\chi) = \chi_{HG} - \chi_G$  означает разность компоненты решения двух задач во всем интервале приливного цикла волны  $M_2$  в нормах:

$$\|\delta(\chi)\|_C = \max_{N^*} |\delta(\chi)|, \quad \|\delta(\chi)\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{N^*} \sum_{N^*} |\delta(\chi)|^2 \right\}^{1/2}$$

по всем значениям  $N^*$  разности  $\delta(\chi)$  в узлах сеточной области.

**Мессинский пролив.** Мессинский пролив отделяет Калабрию (Италия) от острова Сицилия и соединяет Ионическое море с Тирренским (рис. 1). При протяженности пролива около 20 км его морфометрия характеризуется изменчивостью береговой линии и резким перепадом глубин. В его наиболее узкой части расположена вершина подводной горы с глубиной  $\sim 70$  м. По обе стороны горы глубина быстро растет, достигая в южной части 1000 м.

Описание результатов, составивших полувековой итог изучения динамики и гидрологии пролива, содержится в обзорной статье [24]. Результаты моделирования процессов, связанных с приливной динамикой пролива на основе численного решения двумерной и трехмерной краевых задач представлены в [25, 26].



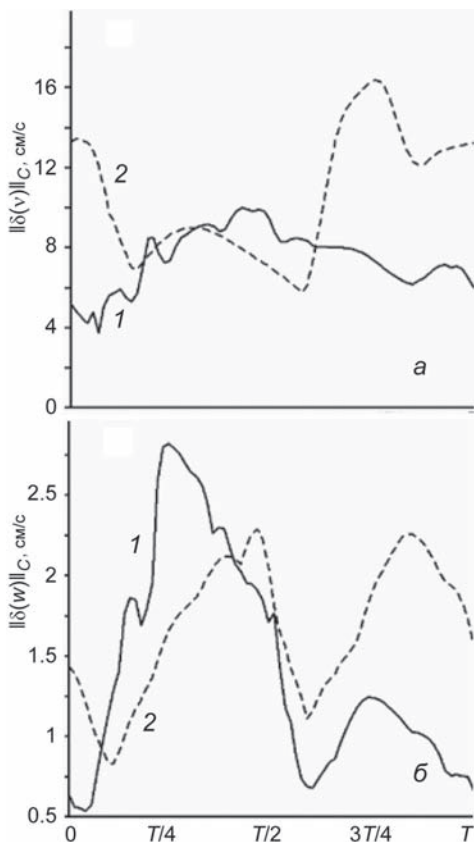


Рис. 1. Географическое положение Мессинского пролива (а) батиметрия и сеточная область, (б) сетка в горизонтальном разрешении  $33 \times 83$ .

Зона расчета негидростатического блока выделена пунктирной линией с точкой. Продольная пунктирная линия указывает положение осевого разреза. Треугольными маркерами указаны основные населенные пункты.

При  $q = \cos\eta \cos\sigma$  имеем  $\varphi = -2\cos\eta \cos\sigma$ . Для получения точности  $O(10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}^2)$  требуется около 20 итераций; повышение точности на порядок требует дополнительно около 200 итераций. На рис. 2 (см. вклейку) дается сравнение аналитического и численного решений в продольном сечении Мессинского пролива.

Обратимся к рассмотрению основного вопроса: в какой мере допустимо решать негидростатическую задачу не во всей области, а только в ее подобласти, примыкающей к вершине подводной горы, где динамика наиболее интенсивна и можно ожидать роста вертикальных скоростей, которые вблизи дна в отсутствие вязкости определяются соотношением  $w \approx h_x u \approx utg\alpha$ . Выделим подобласть (рис. 1, б)



и сравним решения двух задач в этой подобласти, когда в первом случае негидростатическая задача решается во всей области, а во втором — только в этой подобласти, а вне ее задача решается в гидростатическом приближении. На рис. 3 приведено сравнение хода норм  $\|\delta(v)\|_C$  и  $\|\delta(w)\|_C$  для этих двух задач на склонах подводной горы. Наибольшее расхождение на южном протяженном склоне для продольной скорости приходится на интервалы  $3T/4$  второго энергетического максимума волны  $M_2$  и смены течений в конце цикла, составляя около 16 см/с, т. е.  $\sim 10\%$  максимального среднего по глубине значения этой характеристики [26]. Для вертикальной скорости наибольшее расхождение около 2.7 см/с приходится на интервал  $T/4$  для северного склона подводной горы.

На южном склоне максимальные отличия в вертикальной скорости имеют два максимума со значениями  $\sim 2.2$  см/с и несколько смещенных к моментам смены приливного течения.

Северный склон имеет плечо в меридиональном сечении горы, в силу чего оба решения должны быть ближе. Действительно, для продольной скорости наибольшее

Рис. 3. Сравнение хода норм  $\|\delta(v)\|_C$  и  $\|\delta(w)\|_C$  в приливном цикле волны  $M_2$  на склонах подводной горы. а —  $v$  компонента горизонтальной скорости; б — вертикальная компонента скорости. 1 — северный склон; 2 — южный склон.

расхождение кривых составляет около 1 см/с, а для вертикальной скорости кривые фактически совпадают.

Оценка разности решений гидростатической и негидростатической задач во всей области пролива для уровня дает  $\|\delta(\zeta)\|_C \approx 1.2$  см, причем наименьшее значение этой разности достигается над вершиной горы, где расположена амфидромия и движение — гидростатическое. Этим объясняется высокое совпадение расчетных амплитуд уровня в гидростатической постановке с показаниями береговых станций в этой зоне [25].

Приведем оценки отклонений от гидростатических компонентов решения в  $L_2$ -норме:  $\|\delta(v)\|_{L_2} = 4 \cdot 10^{-3}$  см/с,  $\|\delta(u)\|_{L_2} = 6 \cdot 10^{-3}$  см/с,  $\|\delta(w)\|_{L_2} = 8 \cdot 10^{-4}$  см/с,  $\|\delta(\zeta)\|_{L_2} = 5 \cdot 10^{-3}$  см и  $\|\delta(\rho')\|_{L_2} = 10^{-4}$  кг/м<sup>3</sup>. Таким образом, в среднеквадратическом смысле эффекты негидростатики несутся.

На рис. 4 (см. вклейку) представлено нарушение приемлемости гидростатики в ходе приливного цикла волны  $M_2$ , выражаемое критерием  $\gamma$ . Значения  $\gamma$  получены на каждом временном шаге путем локализации в каждом поперечном сечении максимальных значений  $\gamma$  по решению гидростатической задачи. Как видно из рис. 4 нарушение приемлемости гидростатики происходит в энергетические максимумы приливного движения в районе подводной горы.

Отметим, что сравнительно с решением в гидростатической постановке учет негидростатики увеличивает вычислительные затраты более чем вчетверо.

**Гибралтарский пролив.** Гибралтарский пролив расположен между южной оконечностью Пиренейского полуострова и мысом Северной Африки, соединяя Атлантический океан и Средиземное море (рис. 5). Пролив характеризуется изменчивостью и разнообразием морфометрических элементов, включающих зону узкости, пороги, глубокие каньоны и банки. Длина пролива около 60 км, глубина в восточной части у входа в Средиземное море достигает 900 м; к западу глубина уменьшается, составляя в средней части границы с океаном около 300 м. Наибольшее влияние на динамику пролива оказывают Тарифская узкость и расположенный западнее Камаринальский порог глубиной около 300 м (рис. 5).

Пролив имеет двухслойную халинную структуру при переносе в каждом слое  $\sim 1$  Sv. Входящая в пролив океанская вода имеет соленость 36 ‰, глубинные слои Средиземного моря  $\sim 38$  ‰. Течение восточного направления, переносящее океанскую воду, усиливается, достигая в узкости 1 м/с; скорость суммарного приливного течения над порогом  $\sim 2$  м/с. Вблизи порога скорость приливных течений в сизигию приближается к скорости внутренних волн, что ведет к возникновению фронтов и разрушению волн либо к образованию волновых пакетов, распространяющихся на восток [27]. Моделирование полусуточных волн  $M_2$  и  $S_2$  на основе решения двумерной гидростатической краевой задачи в гранично-согласованных координатах выполнено в [28], где определено их влияние на формирование полусуточных приливов в Средиземном море и получена оценка диссипации приливной энергии. Результаты расчета динамических и энергетических характеристик приливной волны  $M_2$ , вертикальной структуры течений и зарождения внутренних волн при колебаниях галоклина в рамках трехмерной гидростатической модели представлены в [29].

**Параметры модели. Оценка точности расчетов.** Краевая задача решалась при значениях параметров:  $f = 0.729 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $\nu = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с,  $K \approx 60$  м<sup>2</sup>/с,  $K_0 = 0$ ,  $\rho_0 = 1.028$  г/см<sup>3</sup>. Информация о граничных и начальных условиях для расчета баротропной и бароклинной динамики пролива содержится в [29].

Проверка сходимости сеточных решений выполнялась расчетом на сетках  $33 \times 65 \times 40$  (40 узл. по вертикали) и  $33 \times 129 \times 40$ . Гистограмма разности расчетных значений уровня на двух сетках показывает, что 85 % различий приходятся на интервал  $(-0.5 \text{—} 2)$  см, что нельзя считать допустимым. Действительно, построенные диаграммы разности  $\delta(\chi)$  между гидростатической и негидростатической компонентами решения во всей области пролива для  $\chi = (u, v, \zeta)$  обнаруживают, что на грубой сетке значения продольной  $u$ -скорости, например, в интервал разности  $\pm 2.5$  см/с попадает около 55 % всех результатов

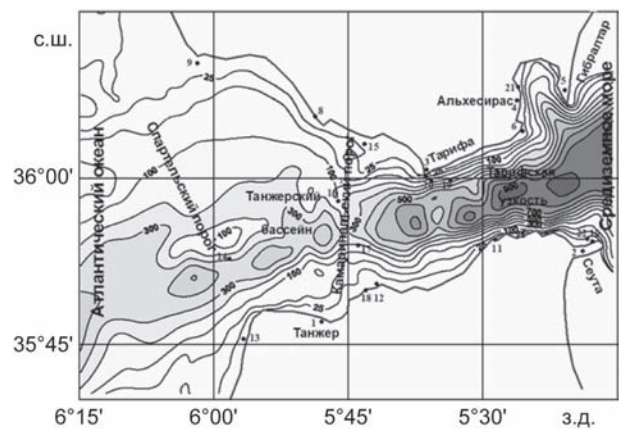


Рис. 5. Батиметрия Гибралтарского пролива.

и даже в интервале  $\pm 7.5$  см/с их только 80 %, тогда как на более мелкой сетке в первом из этих интервалов содержится 70 % разностей  $\delta(u)$ , а во втором — 90 %. Близкие гистограммы имеют разности  $\delta(v)$  и  $\delta(\zeta)$ .

О наличии ярко выраженной негидростатики в приливном цикле волны  $M_2$  свидетельствует критерий (2) в зоне пролива между Спартельским порогом и мысом Альхесирас (рис. 6, см. вклейку). Влияние динамической компоненты давления на бароклинный режим пролива в его центральной части иллюстрируется сдвигом изопикнических поверхностей в моменты энергетических экстремумов волны  $M_2$  (рис. 7, см. вклейку). В случае учета негидростатики меньшая часть поверхностных пресных вод попадает в Атлантику, при этом увеличивается вток тяжелых средиземноморских вод заполняющих глубинные зоны между Тарифской узкостью и Танжерским порогом. Числа Фруда вдоль оси пролива в зоне узкости превышают единицу, что согласуется с некоторым запиранием поверхностных средиземноморских вод в районе узкости.

Выделим подобласть пролива между Камаринальским порогом и Тарифской узкостью. Растянутые гистограммы разности компонентов решения двух задач негидростатической во всей области и только в подобласти свидетельствует о недопустимости грубого сеточного разрешения. Так, на грубой сетке в диапазон  $\pm 7.5$  см/с попадает только 70 % этой разности для  $u$ -компоненты, а на более мелкой сетке — 95 %. Близкие гистограммы получаются для разности и других компонентов двух решений этих задач в выделенной подобласти.

Как отмечалось, выбор подобласти негидростатики должен учитывать ее орографию. Это положение хорошо иллюстрируется примером Гибралтарского пролива. Рассмотрим две его половины, разделенные Камаринальским порогом. Очевидно, что в западной половине пролива (подобласть I), расширенной с более гладким рельефом, эффекты негидростатики проявляются слабее, чем в его восточной половине (подобласть II), узкой, с изменчивой морфометрией, резким перепадом глубин и активной динамикой. Сравнение хода норм  $\|\delta(u)\|_C$  и  $\|\delta(w)\|_C$  в подобластях непосредственно демонстрируют более активную динамику в подобласти II (рис. 8).

Следует подчеркнуть трудность выбора границы подобласти, где целесообразен учет негидростатики, в проливах типа Гибралтарского. Так, если отодвинуть границу западнее в район Спартельского порога, то сращивание решений двух задач окажется не простой процедурой, ибо здесь, как показывают расчеты, в интервалах первого и второго энергетического минимума возникает сильный центральный водоворот, пронизывающий всю халинную структуру, но особенно выраженный в верхнем слое. Другим ограничением, с которым необходимо считаться, является возможность того, что граница выделенной подобласти окажется в месте сулоя — неустойчивых разнонаправленных течений, проявляющихся пенными полосами, как на поверхности кипящей воды. У северного берега Гибралтарского пролива существуют семь районов сулоя между мысами Трафальгар и Европа, а у южного — между мысом Эспартель и Сеутой, их тринадцать [30]. Таким образом, во избежание трудоемких вычислительных экспериментов выделение подобласти учета негидростатики требует внимательного ознакомления с особенностями локальной динамики ее границы.

**Баб-эль-Мандебский пролив.** Баб-эль-Мандебский пролив расположен между Африканским побережьем и южной оконечностью Аравийского полуострова, соединя Красное море с Аденским заливом Индийского океана (рис. 9). Длина пролива  $\sim 150$  км, глубина в средней части  $\sim 300$  м, площадь поперечного сечения в самой узкой части у о. Перим около  $3 \text{ км}^2$ . К северу пролив расширяется до 40 км; здесь у о. Хениш находится порог, препятствующий свободному водообмену через пролив. Наименьшая глубина пороговой зоны 137 м, ширина в сечении порога около 110 км.

Сложная структура физических процессов в проливе определяется взаимодействием баротропного прилива с плотностными течениями.

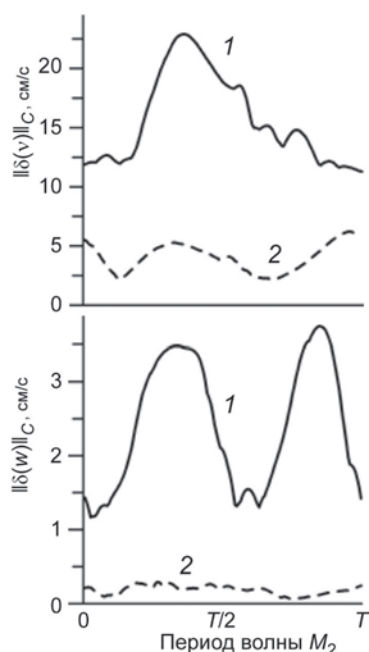


Рис. 8. Сравнение хода норм  $\|\delta(v)\|_C$  и  $\|\delta(w)\|_C$  в приливном цикле в подобластях Гибралтарского пролива. 1 — восточная, 2 — западная подобласть.

Амплитуда колебаний уровня уменьшается от ~2 м на границе с заливом до ~1 м у Хенишского порога. Бароклинные течения обязаны разности плотностей вод граничных бассейнов, соленость которых отличается на 2 ‰ и совместно с муссонными течениями определяют гидрологическую структуру пролива: зимой — двухслойную, летом — трехслойную. Эти и другие особенности режима Баб-эль-Мандебского пролива делают его моделирование, как показывает обсуждение в [31], задачей повышенной сложности.

Результаты моделирования внутреннего прилива и энергетических характеристик в гидростатическом приближении представлены в [32, 33] содержащих и библиографию по предмету. Результаты расчета негидростатического баротропно-бароклинного взаимодействия в зимний период гидрологического цикла Баб-эль-Мандебского пролива приведены в [11].

Ниже некоторые из этих результатов приводятся в качестве примера динамики пролива, в котором нецелесообразно выделять зоны негидростатики, хотя по протяженности он более чем вдвое превосходит Гибралтарский и в семь раз — Мессинский.

**Вычислительные параметры и оценка точности решения.** Для проверки сходимости численных решений краевая задача интегрировалась на сетке  $33 \times 53 \times 40$  и на вдвое измельченной в продольном направлении сетке  $33 \times 105 \times 40$  с шагами  $\Delta_{\min} = 110$  м,  $\Delta_{\max} = 3500$  м и шагом по времени  $\tau = 90$  с. Краевые условия на открытых границах ставились исходя из решения в расширенной области, включающей Красное море и прилегающую часть Аденского залива. На свободной поверхности задавались потоки тепла и касательные напряжения ветра.

Результаты обнаруживают существенное отличие решений на двух сетках. Ход компонент решения  $\chi = (\mathbf{u}, \rho')$  в норме  $\|\chi\|_C$  за приливный цикл дан на рис. 10. Характер сходимости итераций при решении краевой задачи (17)–(19) представлен на рис. 11. Рис. 12 показывает различие решений полной и гидростатической задач при определении поверхности раздела вод граничных бассейнов по оси пролива на четыре момента приливного цикла волны  $M_2$ .

Такое различие обязано существенному влиянию негидростатической компоненты давления на поток энергии через северную границу пролива с Красным морем (рис. 13).

Результаты свидетельствуют, что влияние негидростатики заметно проявляется во всей области пролива даже на такой, относительно грубой сетке, использовавшейся в расчетах.

\*\*\*

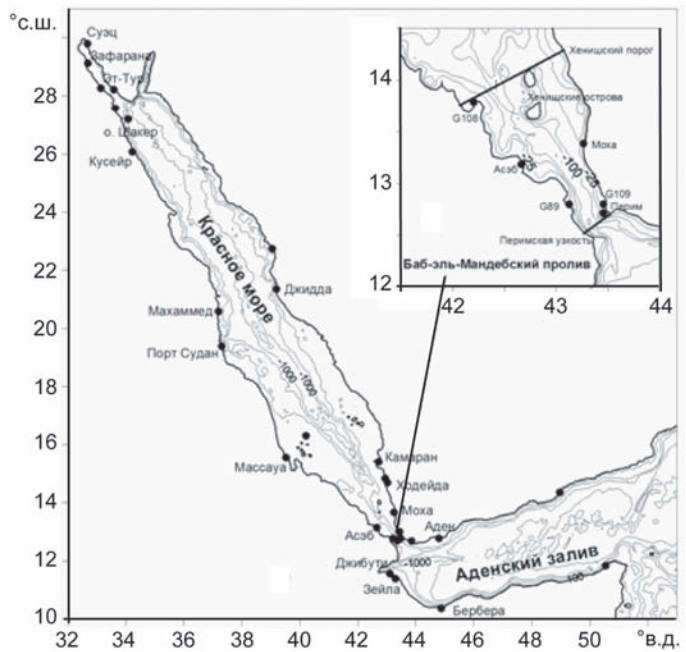


Рис. 9. Географическое положение и батиметрия Баб-эль-Мандебского пролива (врезка).

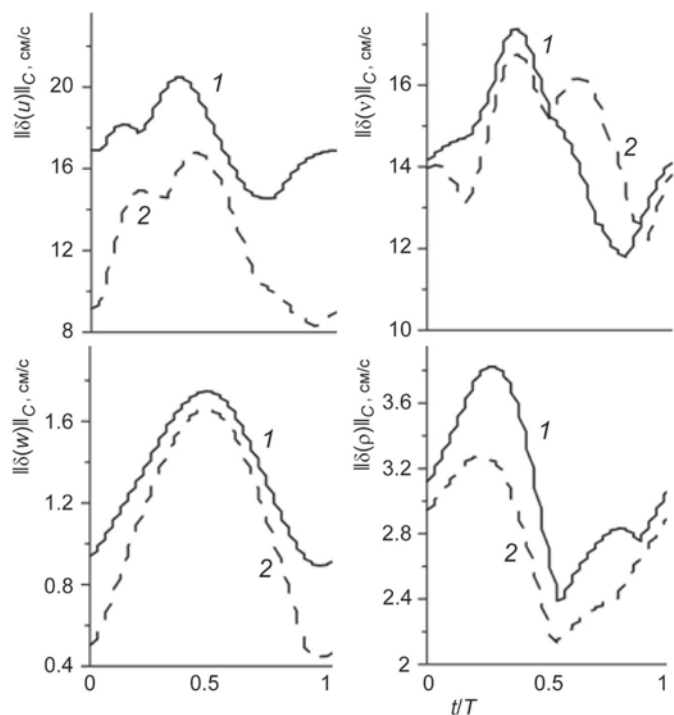


Рис. 10. Сравнение хода норм максимальных отклонений  $\|\mu(\chi)\|_C$ ,  $\mu = \{\mathbf{u}, \rho'\}$  в приливном цикле волны  $M_2$  на двух сетках. 1 — сетка  $33 \times 105$ ; 2 — сетка  $33 \times 53$ .

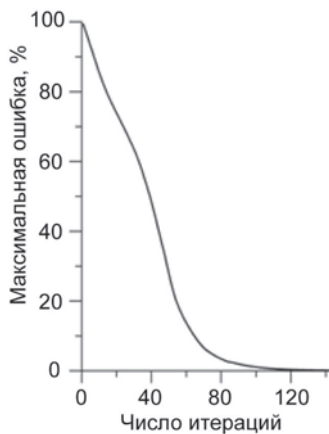


Рис. 11. Сходимость решения эллиптической задачи.

Баротропно-бароклинное взаимодействие в проливах Мирового океана определяется масштабами динамики самого пролива и движениями большего масштаба, навязываемого приливами граничных бассейнов. Различие масштабов движения выражается формой задания давления в динамических уравнениях. При моделировании крупномасштабных движений, таких как внешний баротропный прилив с числом Фридрикса  $\varepsilon^2 = H^2/L^2 \leq 10^{-4}$ , используется приближение гидростатики и решается краевая задача для примитивных уравнений. Моделирование внутреннего пролива, гидрологических полей и других движений меньшего масштаба с  $\varepsilon > O(10^{-2})$  требует учета динамической компоненты давления. В проливе, при относительно небольшой его протяженности, адекватная модель взаимодействия разномасштабных движений должна строиться на основе постановки и решения краевой задачи для полных трехмерных уравнений, в которые входят обе компоненты

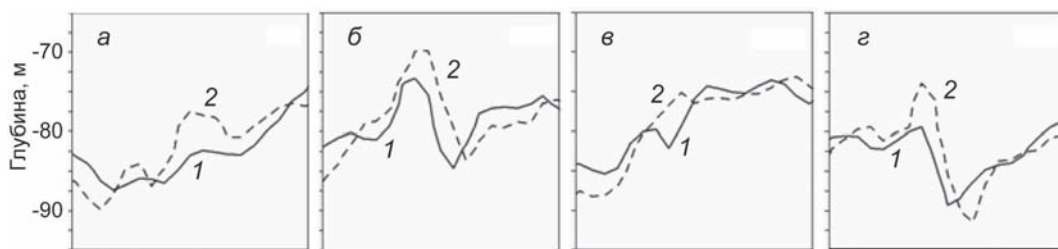


Рис. 12. Положения поверхности раздела вод Красного моря и Аденского залива на четыре момента приливного цикла волны  $M_2$  вдоль оси пролива.  $a$  —  $t = 0$ ;  $b$  —  $t = T/4$ ;  $v$  —  $t = T/2$ ;  $z$  —  $t = 3T/4$ ; 1 — гидростатика; 2 — негидростатика.

давления. Особенность задачи в том, что динамическая компонента давления на несколько порядков меньше главной части — статического давления, а ее нахождение путем решения краевой задачи для уравнения Пуассона требует вычислительных затрат в разы и даже на порядки, в зависимости от размера области, превышающих затраты на решение гидростатической задачи. При этом решение полной задачи осложняется еще и тем, что ее численная реализация требует более высокого сеточного разрешения, иначе на грубой сетке решения полной и гидростатической задач неразличимы. Вместе с тем представление о слабом влиянии негидростатики на динамику и гидрологию пролива в связи с относительной малостью самих ее значений было бы ошибочным, как показывает, например, рис. 6, выявляющий резкие нарушения критерия гидростатики в приливном цикле волны  $M_2$  в зонах Гибралтарского пролива или рис. 13 с выраженной ролью негидростатики в потоке энергии через северную границу Баб-эль-Мандебского пролива.

Существенное влияние динамической компоненты давления на режим течений, термохалинную структуру и биологические процессы, обязанные вертикальным потокам концентраций органических и минеральных взвесей, делают необходимым ее учет. При этом решение полной негидростатической

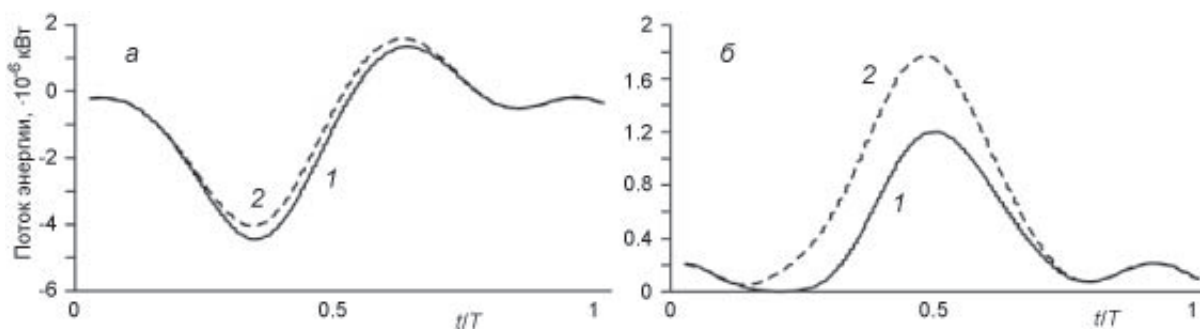


Рис. 13. Потоки энергии на открытых границах пролива.  $a$  — южная граница;  $b$  — северная граница. 1 — гидростатика; 2 — негидростатика.

задачи наталкивается на ограничения, определяемые уровнем развития современных средств и методов вычислений. Но если такое ограничение относится к достаточно обширным регионам Мирового океана, как, скажем, его шельф или архипелаги, то вполне возможно выделение подобластей негидростатики и сращивание их граничных решений с решением гидростатических примитивных уравнений в остальной области. Такой подход удобно реализуется на примере проливов Мирового океана. Этим достигаются две цели: совершенствование самой модели пролива и разработка методики выделения подобластей.

Следуя такой программе, в работе предложена классификация проливов с точки зрения рационального выделения подобластей негидростатики, исходя из морфометрической и термохалинной структуры пролива, определяющих выраженную роль негидростатики. Проливы подразделяются на три типа. К первому относятся проливы, в которых выделение подобласти негидростатики выполняется произвольно, подчиняясь только требованию достаточной близости граничных решений двух задач и не требует специальной процедуры их сращивания, как, например, Мессинский или Ломбок. Такой тип характеризуется доминирующей подводной горой, изменение крутизны которой или наличие плеча подсказывают локализацию подобласти негидростатики. Ко второму типу относятся проливы, в которых выделение такой подобласти может оказаться невыполнимым, если не проявить осмотрительности. К ним относятся проливы с разнонаправленной структурой течений, взаимодействие которых усиливается, порождает водовороты или становится хаотичным на нерегулярных элементах прибрежной морфометрии, как, например, Гибралтарский пролив, проливы Шантарских островов на юге Охотского моря, проливы Курильской гряды и др. [30]. Наконец, к третьему типу отнесены проливы, в которых выделение подобластей негидростатики нецелесообразно, поскольку она присуща динамике всего пролива в силу его морфометрической изрезанности и изменчивости рельефа. Это — проливы архипелагов, островных дуг, фиордовых систем, коралловых регионов, а также многие отдельные проливы, как, например, Баб-эль-Мандебский. Конечно, такая классификация весьма условна, но отвечая единственному принципу, положенному в ее основу, может помочь ориентироваться на первоначальном этапе постановки задачи при построении модели пролива.

В работе представлена модель пролива на основе формулировки краевой задачи для негидростатических трехмерных уравнений динамики и конститuentов плотности. Задача преобразуется к криволинейным гранично-согласованным координатам и решается использованием геофизической модификации проекционного метода, когда на первом этапе временного шага определяется решение гидростатической задачи, а на втором — находится динамическое давление путем решения краевой задачи для уравнения Пуассона и уточняется поле скорости.

Для проливов Мессинского, Гибралтарского и Баб-эль-Мандебского как представителей типов классификации приводятся результаты, характеризующие роль негидростатики в динамике и гидрологии каждого из них; для первых двух типов проливов дается оценка точности решения при выделении подобласти негидростатики.

Развитие такой программы заключается в построении моделей более масштабных структур Мирового океана: системы проливов и регионов его шельфа. В связи с предельными вычислительными затратами рациональный и экономичный подход к постановке таких задач может использовать не только пространственное выделение подобластей негидростатики, но и временные интервалы ее наибольшей значимости в циклах приливных гармоник. При этом особого внимания требует вопрос, обычно игнорируемый, постановки краевой задачи для примитивных уравнений, поскольку поточечная по вертикали постановка краевых условий в области с открытой границей для них некорректна [34]. Очевидно что, несмотря на быстрые успехи океанологического моделирования, мы еще очень далеки от создания надежных и адекватных моделей мезомасштабной динамики регионов Мирового океана с сеточной детализацией допускающей разрешение тонкой вертикальной структуры гидрофизических полей, необходимые для понимания природы их флуктуаций и приложений, связанных с процессами вертикального перемешивания и распространения концентраций органики, минеральных взвесей и радиоактивных веществ. Выполненная работа может рассматриваться как шаг в этом направлении.

### Литература

1. *Stoker J. J.* Water waves. New York: Interscience Publishers, 1957.
2. *Marshall J., Hill C., Perelman L., Adcroft A.* Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102, C3. P. 5733—5752.

3. Jones H., Marshall J. Convection with rotation in a neutral ocean; a study of open-ocean deep convection // *J. Phys. Oceanogr.* 1993. V. 23. P. 1009—1039.
4. Androsov A., Rubino A., Romeiser R., Sein D. V. Open-ocean convection in the Greenland Sea: preconditioning through a mesoscale chimney and detectability in SAR imagery studied with a hierarchy of nested numerical models // *Meteorologische Zeitschrift.* 2005. V. 14, N 14. P. 693—702.
5. Mahadevan A., Olliger J., Street R. A nonhydrostatic mesoscale ocean model part 1,2 // *J. Phys. Oceanogr.* 1996. V. 26. P. 1868—1900.
6. Shapiro G. I., Hill A. E. Dynamics of dense water cascades at the shelf edge // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. V. 27(1). P. 2381—2394.
7. Zhu D. Z., Lawrence G. A. Non-hydrostatic effects in layered shallow water flows // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 355(25). P. 1—16.
8. Wadzuk B. M., Hodges B. R. Isolation of hydrostatic regions within a basin // 17th ASCE Engineering Mechanics Conference, June 13—16, 2004, University of Delaware, Newark, Electronic Proceedings (CD-ROM), 6 p.
9. Davis A. M., Xing J., Berntsen J. Non-hydrostatic and non-linear contributions to the internal wave energy flux in sill regions // *Ocean Dynamics.* 2009. V. 59(6). P. 881—897.
10. Zhang Z., Fringer O. B., Ramp S. R. Three-dimensional, nonhydrostatic numerical simulation of nonlinear internal wave generation and propagation in the South China Sea // *J. Geoph. Res.* 2011. V. 116. C05022. P. 1—26.
11. Вольцингер Н. Е., Андросов А. А. Негидростатическое баротропно-бароклинное взаимодействие в проливе с горным рельефом // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2013. Т. 6, № 3. С. 63—77.
12. Ma G., Shi F., Kirby J. T. Shock-capturing non-hydrostatic model for fully dispersive surface wave processes // *Ocean Modelling.* 2012. V. 43—44. P. 22—35.
13. Dutykh D., Kalisch H. Boussinesq modeling of surface waves due to underwater landslides // *Nonlin. Processes Geophys.* 2013. V. 20. P. 267—285.
14. Chubarov L. B., Eletsky S. V., Fedotova Z. I., Khakimzyanov G. S. Simulation of surface waves generation by an underwater landslide // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* 2005. V. 20(5). P. 425—437.
15. Диденкулова И. И., Пелиновский Е. Н. Накат длинных волн на берег: влияние формы подходящей волны // *Океанология.* 2008. Т. 48, № 1. С. 5—10.
16. Didenkulova I., Nikolkina I., Pelinovsky E., Zahibo N. Tsunami waves generated by submarine landslides of variable volume: analytical solutions for a basin of variable depth // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2010. V. 10, Iss. 11. P. 2407—2419.
17. Андросов А. А., Вагер Б. Г., Вольцингер Н. Е. Трехмерная модель оползневой динамики // *Вестник Гражданских Инженеров.* 2010. № 5(46), С. 122—128.
18. Бейзель С. А., Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б. Моделирование поверхностных волн, порождаемых подводным оползнем, движущимся по пространственно неоднородному склону // *Вычислительные технологии.* 2010. Т. 15, № 3. С. 39—51.
19. Javam A., Imberger J., Armfield S. Numerical study of internal wave reflection from sloping boundaries // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 396. P. 183—201.
20. Stansby and Zhon. Shallow-water flow solver with non-hydrostatic pressure: 2D vertical plane problems // *International Journal for Numerical Methods in Fluids* V. 28(3). P. 541—563.
21. Сафрай А. С., Каченко И. В., Гордеева С. М., Белевич М. Ю. Моделирование сезонной изменчивости внутренних приливных волн в Баренцевом море // *Навигация и гидрография.* 2006. № 22. С. 118—125.
22. Brandt P., Rubino A., Alpers W., Backhaus J. O. Internal waves in the Strait of Messina studied by a numerical model and synthetic aperture radar images from the ERS 1/2 satellites // *Journal of Physical Oceanography.* 1997. V. 27. P. 648—663.
23. Андросов А. А., Вольцингер Н. Е. Проливы Мирового Океана — общий подход к моделированию. СПб.: Наука, 2005. 188 с.
24. Bignami F., Salusti E. Tidal currents and transient phenomena in the Strait of Messina: A review // *The Physical Oceanography of Sea Straits / Ed.: Pratt L. J. Kluwer Ac. Publ., Netherl., 1990. P.95—124.*
25. Androssov A. A., Kagan B. A., Romanenkov D. A., Voltzinger N. E. Numerical modelling of barotropic tidal dynamics in the strait of Messina // *Advances in Water Resources.* 2002. V. 25. P. 401—415.
26. Андросов А. А., Вольцингер Н. Е., Романенков Д. А. Моделирование трехмерной бароклиновой приливной динамики Мессинского пролива // *Изв. РАН, ФАО.* 2002. Т. 38, № 1. С. 119—134.
27. Овчинников И. М. Течения в проливах и морях Средиземноморского бассейна // *Гидрология Средиземного моря / Ред. В. А. Бурков. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 375 с.*
28. Tejedor L., Izquierdo A., Kagan B., Sein D. Simulation of the semidiurnal tides in the Strait of Gibraltar // *Journal of Geophysical Research.* 1999. V. 104. P. 13541—13557.
29. Андросов А. А., Вольцингер Н. Е., Либерман Ю. М., Романенков Д. А. Моделирование динамики вод в Гибралтарском проливе // *Изв. РАН, ФАО.* 2000. Т. 36, № 4. С. 526—541.
30. Зубов Н. Н. Основы учения о проливах Мирового океана // *Гос. изд. геогр. лит. Москва, 1956, 239 с.*
31. Pratt L. J., Helfrich K. R. Current research problems // *The Phys. Oceanogr. Sea Straits / Ed. Pratt L.J. Kluwer Ac. Publ., 1990. P. 577—580.*
32. Андросов А. А., Вольцингер Н. Е. Моделирование внутреннего прилива в Баб-эль-Мандебском проливе Красного моря // *Изв. РАН, ФАО.* 2008. Т. 44, № 1. С. 127—144.
33. Вольцингер Н. Е., Андросов А. А. Расчет энергии баротропно-бароклинового взаимодействия в Баб-эль-Мандебском проливе // *Изв. РАН, ФАО.* 2010. Т. 46, № 2. С. 235—245.
34. Olliger J., Sundström A. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics // *SIAM J. Appl. Math.* 1978. V. 35, № 3. P. 419—445.

Статья поступила в редакцию 08.09.2015 г.

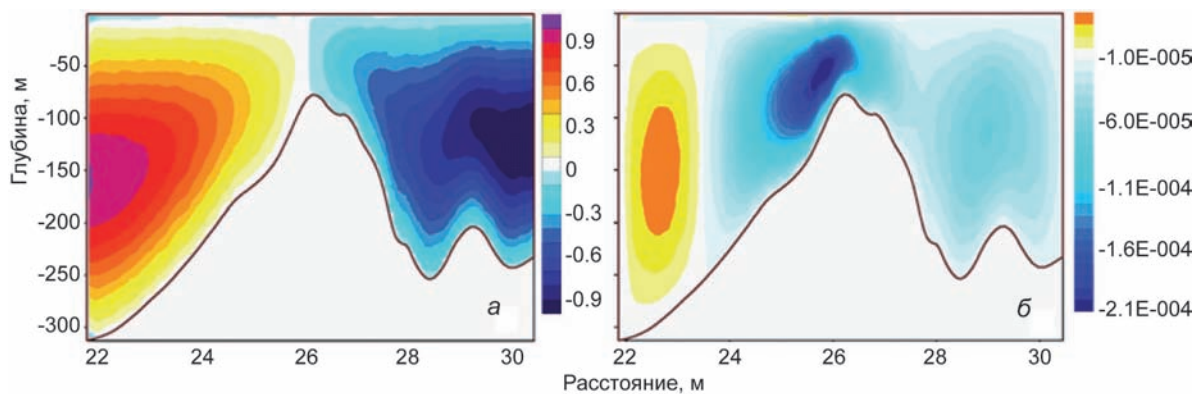


Рис. 2. Точность решения эллиптической задачи в продольном сечении Мессинского пролива (пунктир на рис. 1). *a* — аналитическое решение; *б* — разность между численным и аналитическим решением.

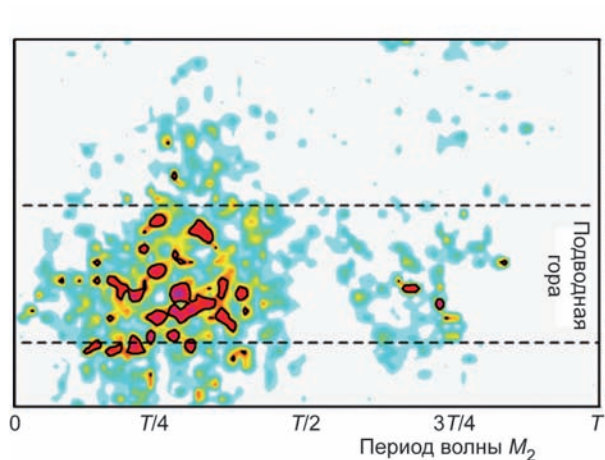


Рис. 4. Оценка нарушения критерия гидростатики в области подводной горы, выделенной на рис. 1, *б*, в ходе приливного цикла волны  $M_2$ .

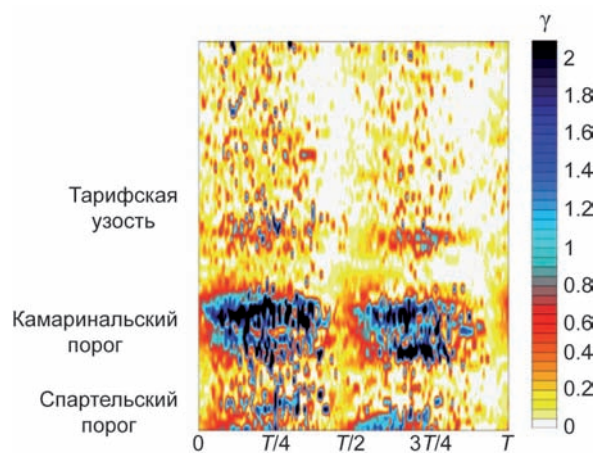


Рис. 6. Нарушение критерия гидростатики за приливной период волны  $M_2$  в зонах Гибралтарского пролива.

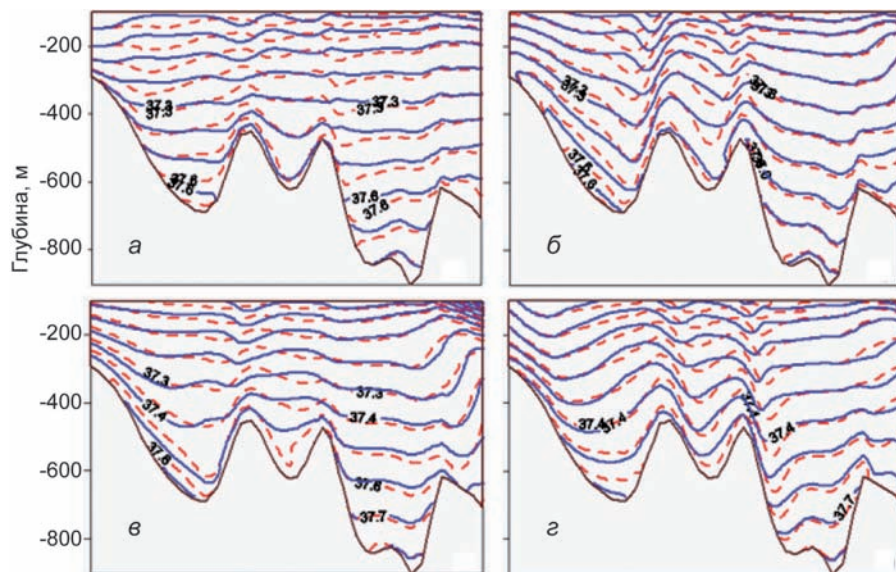


Рис. 7. Влияние негидростатики на бароклинный режим центральной части (продольное сечение) Гибралтарского пролива.

Первый энергетический минимум (*a*) и максимум (*б*); второй энергетический минимум (*в*) и максимум (*г*). Сплошные линии — гидростатика; пунктирные — негидростатика.