

УДК 551.466.8

© А. С. Сафрай¹, И. В. Ткаченко^{1,2}, С. М. Гордеева^{1,3}

¹Санкт-Петербургский филиал института океанологии им. П.П.Ширшова РАН

²Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

³Российский государственный гидрометеорологический университет, Санкт-Петербург
smgordeeva@yandex.ru

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ОДИНОЧНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ В КАНАЛЕ. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Исследовалась эволюция одиночной внутренней волны и факторы, влияющие на скорость ее затухания. Изучалось влияние нелинейностей системы уравнений модели на численное решение, поскольку нелинейные взаимодействия зачастую являются решающими. В серии численных экспериментов с трехмерной негидростатической конечно-элементной моделью вода-воздух, дополненной алгоритмом метода конечных объемов, воспроизводилось прохождение одиночной внутренней волны в канале с различной стратификацией плотности. Приводится краткое описание модели, постановка задачи и особенности численного алгоритма. Для анализа результатов численных экспериментов использовался вейвлет-анализ, позволивший наиболее полно и в то же время компактно описать временную эволюцию решения. Численные эксперименты с моделью показали, что основным механизмом внутриволновой динамики для выбранного объекта является нелинейное трехволновое взаимодействие, в результате которого из входящей волны и длинной волны, связанной с особенностью форсинга, формируется третья, наиболее долгоживущая волна, в которую происходит переток энергии из первых двух волн. Эти волны при этом быстро затухают. Результирующая волна стационарируется, а ее затухание начинается позже. В эксперименте с большей толщиной пикноклина характер эволюции сохраняется, но уровень потенциальной энергии выше, а длинная волна затухает быстрее. Показано, что изменение баланса диффузионного и адвективного членов уравнения модели, определяющего нелинейное взаимодействие волн, влияют на скорость затухания и время жизни волн разной длины.

Ключевые слова: численное моделирование, негидростатическая модель, внутренние волны, нелинейное взаимодействие.

A. S. Safray¹, I. V. Tkachenko^{1,2}, S. M. Gordeeva^{1,3}

¹Saint-Petersburg Department of the P.P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, St.-Petersburg, Russia

²Saint-Petersburg State Marine Technical University, St.-Petersburg, Russia

³Russian State Hydrometeorological University, St.-Petersburg, Russia

ABOUT EVOLUTION OF A SINGLE INTERNAL WAVE IN A CHANNEL. NUMERICAL EXPERIMENTS

In this paper an attempt to numerical research of the single internal wave damping process in a channel have been fulfilled to obtain data about wave evolution and factors which influence at damping speed. The second goal of this work consists of investigation of governing system of the model equations nonlinearity influence at numerical solutions/wave evolution, because nonlinear wave interaction often play the primary role in the processes under investigations. Previously, investigation devoted to generation of internal waves by a single surface had been examined by the authors. In the course of it some evaluations of internal wave damping in dependence of mean flow value and stratification, (two-layer and linear) had been obtained. Now, in the course of numerical experiments with 3-D non-hydrostatic finite element model «air-water» supplemented by VOF block, passing of a single internal wave through a channel with different stratification had been simulated. There are a brief description of the model and its numerical algorithm in the paper. Wavelet analysis of numerical simulations results had been used to describe them in the most compact and full form. It was shown that the main role in the internal wave evolution in our experiments plays non-linear three-wave interaction. In the course of it forcing wave and long wave (originated by forcing peculiarities) produce the third long-live wave which assimilates energy of the first two ones. Its damping begins later.

Key words: numerical modelling, nonhydrostatic model, internal waves, nonlinear interaction.

Сафрай А. С., Ткаченко И. В., Гордеева С. М. Об эволюции одиночной внутренней волны в канале. Численные эксперименты // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 1. С. 52—58.

Safray A. S., Tkachenko I. V., Gordeeva S. M. About evolution of a single internal wave in a channel. Numerical experiments. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika*. 2016, 9, 1, 52—58.

Описание процессов генерации и затухания внутренних волн — одна из наименее изученных проблем их теории. Основные результаты получены в рамках уравнений теории волн и в основном относятся к изучению и описанию этих процессов для модельных стратификаций и установившихся регулярных волн [1—3]. В данной работе в качестве аппарата исследования использовалась трехмерная негидростатическая конечно-элементная модель вода-воздух, дополненная алгоритмом метода конечных объемов (VOF). Использование этого метода позволяет осуществлять моделирование поверхностных волн. Одиочная волна была выбрана объектом исследования для исключения влияния возможных коллективных взаимодействий.

Кратко повторим описание модели [4—6], поскольку эксперименты включают варьирование ее параметров.

Постановка задачи и численная аппроксимация. Согласно методу VOF, плотность многофазной (в данном случае двухфазной) среды представляет собой сумму

$$\rho = \alpha_a \rho_a + \alpha_w \rho_w, \quad (1)$$

где ρ_a — плотность воздуха, ρ_w — плотность морской среды, α_a — объемная фракция воздуха, α_w — объемная фракция морской среды.

Объемную фракцию воздуха α_a можно выразить через объемную фракцию воды α_w :

$$\alpha_a = 1 - \alpha_w. \quad (2)$$

Тогда, с учётом (1), (2), плотность двухфазной среды записывается как

$$\rho = (1 - \alpha_w) \rho_a + \alpha_w \rho_w = \rho_a + \alpha_w (\rho_w - \rho_a). \quad (3)$$

Будем полагать, что плотность воздуха постоянна $\rho_a = \text{const}$. Плотность морской среды меняется с глубиной, и ее можно представить в виде

$$\rho_a = \rho_l + f(\rho_h - \rho_l), \quad (4)$$

где ρ_l — плотность легкой жидкости, ρ_h — плотность тяжелой жидкости, f — коэффициент смешения (безразмерная плотность жидкости). С учетом (3) выражение (4) можно записать следующим образом

$$\rho = \rho_a + \alpha_w [\rho_l + f(\rho_h - \rho_l)] = \rho_a + \alpha_w (\rho_l - \rho_a) + \alpha_w (\rho_h - \rho_l) f. \quad (5)$$

Отметим, что выражение (5) является нелинейным.

Для учета эффекта поверхностного натяжения в уравнения импульса необходимо ввести дополнительное слагаемое $F_\sigma = -\sigma \delta(\alpha_w) kn$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения (ПН); δ — дельта-функция, определенная на границе раздела морская среда–воздух; k, n — кривизна и нормаль к поверхности раздела [7] (конечно, такое описание на используемых пространственных масштабах является только параметризацией интегрального эффекта ПН по «стягиванию» поверхности, записанной в привычной форме.) Тогда окончательный вид уравнений трехмерного нестационарного движения вязкой стратифицированной жидкости, ограниченной свободной поверхностью, записывается в виде следующих равенств:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x_i} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle_\Delta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{SGS}}{\partial x_j} + g_i + F_\sigma, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_s \frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial x_j} - \frac{\partial J_j^{SGS}}{\partial x_j}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \alpha_w}{\partial x_j} = 0, \quad (9)$$

где $i, j = 1 \dots 3$; — оператор пространственного осреднения; u_i — компонента вектора скорости; p — давление; ν — кинематическая вязкость жидкости; D_s — коэффициент диффузии; g_i — компонента вектора ускорения свободного падения. Функция α_w является индикаторной. В уравнении (9) учтено, что турбулентный обмен между фазами отсутствует.

Параметризация подсеточных напряжений и потоков скаляра осуществляется на основе моделей добавочной вязкости Смагоринского

$$\tau_{ij}^{SGS} = -2\nu_{SGS} \langle S_{ij} \rangle_{\Delta}, \quad \langle S_{ij} \rangle_{\Delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle_{\Delta}}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle_{\Delta}}{\partial x_i} \right), \quad J_j^{SGS} = -\frac{\nu_{SGS}}{SC_{SGS}} \frac{\partial \langle f \rangle_{\Delta}}{\partial x_j}, \quad (10)$$

где $\nu_{SGS} = C_s^2 \Delta^2 |S| f_s(Ri)$ – подсеточная вязкость; $|S| = \sqrt{2 \langle S_{ij} \rangle_{\Delta} \langle S_{ij} \rangle_{\Delta}}$; C_s — коэффициент Смагоринского; $SC_{SGS} = 0.4 \cdot 0.7$ — турбулентное число Шмидта; $Ri = N^2 / (du_1/dx_3)^2$ — число Ричардсона; $N^2 = -g/\rho dp/dx_3$ — квадрат частоты Вейселя. Функция плавучести принята в виде [5]

$$f_s(Ri) = (1 - Ri/C_{BS})^{3/2} (1 - Ri/SC_{SGS})^{-1}, \quad (11)$$

где $C_{BS} \approx 0.273$ — константа.

На входной границе канала задаются профили скорости, плотности и объемной фракции, как функции амплитуды и частоты входящей волны. На выходе из канала используются нормальная компонента скорости и условие Неймана для других переменных. На твердых границах — условие прилипания для скорости или используются пристеночные функции на основе логарифмической зависимости, а так же отсутствие потока скаляра. В начальный момент времени полагается, что поля скорости, турбулентной вязкости и давления — однородны.

Для решения системы дифференциальных уравнений (6)—(9) используется полуявный проекционный метод [4]. На первом этапе определяются промежуточные значения скорости по известным (с предыдущего шага по времени или из начальных условий) полям скорости, давления и плотности. На втором этапе находятся поправки давления δp , являющиеся решением уравнения Пуассона. Затем корректируются промежуточные значения скорости и давления по найденным δp . На последнем этапе рассчитываются коэффициент смешения, объемная фракция жидкости и поле плотности. В пространственной области дискретизация осуществляется методом Петрова—Галеркина с линейным представлением интерполяционного базиса и проекционным базисом, предложенным в [8]. Аппроксимация производных имеет второй порядок точности. Система линейных алгебраических уравнений решается методом сопряженных градиентов. Для повышения эффективности расчетов используется алгоритм распределенных вычислений, основанный на декомпозиции по подобластям и декомпозиции аппроксимирующих матриц.

Материалы и методы обработки. В исследовании была выполнена серия расчетов для прямоугольной области (канала) длиной 6 м, шириной 0.5 м и высотой 0.8 м. Середина пикноклина находилась на глубине 0.2 м (0.3 м от дна), поверхность — на 0.5 м, далее — до высоты 0.8 м располагался слой воздуха. Плотность слоя воды над пикноклином составляла 1000 кг/м^3 , под пикноклином — 1010 кг/м^3 , в пикноклине плотность распределялась по линейному закону. В основном, базовом эксперименте, частота волны на входе задавалась равной 2.1 с^{-1} , амплитуда — 0.15 м, толщина пикноклина — 0.04 м, скорость среднего потока — 0.2 м/с. Выбор столь значительной амплитуды, много превышающей толщину пикноклина, вызван желанием исследовать наибольшее количество факторов, влияющих на эволюцию волны.

В качестве исходных данных для обработки и визуализации экспериментов послужили значения высоты положения середины пикноклина (1005.0 кг/м^3) на разрезе по центру вдоль бассейна (x от -3.0 до 3.0 м, $y = 0.0$) с дискретностью 3 см. Рассматривались каждые 40 шагов расчета, временной промежутков между которыми составил 0.12 с, от 1.2 до 12 с, т. е. 90 моментов времени.

Для анализа результатов численных экспериментов использовался вейвлет-анализ, позволивший наиболее полно и в то же время компактно описать временную эволюцию решения. Поскольку колебание пикноклина в пространстве является нерегулярным, то для анализа его пространственной структуры вейвлет-преобразование обладает значительными преимуществами перед традиционным спектральным анализом. Вейвлет-анализ не имеет ограничений на стационарность в пространстве или времени и позволяет исследовать каждый масштаб колебаний (интенсивность, изменения масштаба, локализацию) с необходимой и достаточной разрешающей способностью. Поэтому вейвлет-преобразование называют еще локализованным спектральным анализом или спектральным анализом локальных возмущений [9]. В качестве его базисных функций при решении гидрометеорологических задач предпочтения заслуживает вейвлет Морле [10, 11], который обеспечивает адекватное отражение волновых процессов. Математические основы метода хорошо разработаны. В работе использовался

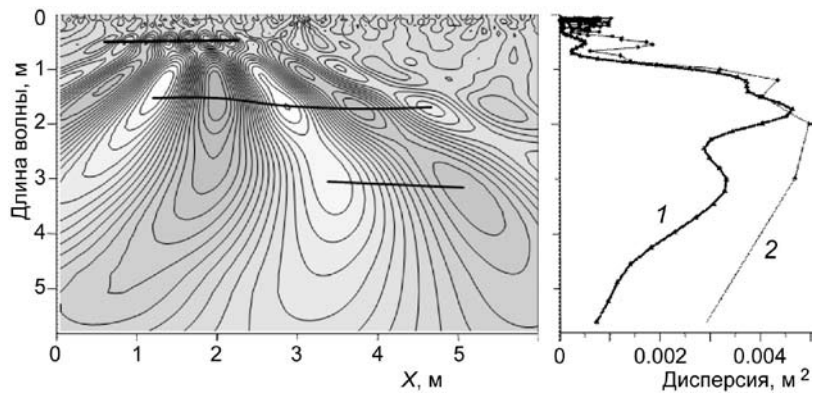


Рис. 1. Распределение коэффициентов вейвлет-разложения пространственной изменчивости изопикны 1005.0 кг/м^3 на момент времени 8.4 с с начала расчета (а), а также интегральный по пространству вейвлет-спектр (1) и пространственный спектр Фурье (2) для базового эксперимента (б).

комплект программ Торренса и Компо [12], которые находятся в свободном доступе на сайтах <http://paos.colorado.edu/research/wavelets/> и <http://ion.exelisvis.com/>.

Вейвлет-разложению подвергались пространственные ряды высоты положения середины пикноклина на каждый момент времени. Использовался вейвлет Морле с параметром 6.

На рис. 1 показано распределение коэффициентов вейвлет-разложения на момент времени 8.4 с с начала расчета, а также интегральный по пространству вейвлет-спектр (скейлограмма). Как видно из рисунка, ярко выраженные экстремумы в поле вейвлет-коэффициентов проявляются в виде пиков его интегральной функции, при этом теряется информация о пространственной локализации волнового проявления на данном масштабе (длине волны). Интегральный вейвлет-спектр похож по своим пикам на спектральный анализ Фурье (тонкая линия на рис. 1), однако их сравнение показывает основные различия: вейвлет-анализ подробнее отражает колебания на средних и низких частотах, а спектральный анализ, наоборот, — на высоких частотах.

Для анализа результатов экспериментов интегральный вейвлет-спектр рассчитывался на каждом из 90 временных шагов, от 1.2 до 12 с от начала расчета, и представлялся в виде поля изменения дисперсии колебаний пикноклина на разных масштабах (длинах волн) во времени.

Для графического представления и анализа интегральных вейвлет-спектров в качестве ординаты использовалась длина волны, а не более привычные волновые числа, поскольку именно такое представление позволило получить наиболее информативную картину.

Результаты экспериментов и обсуждение. Результаты базового эксперимента представлены на рис. 2 и 3. На рис. 2 представлено распределение высоты центральной оси пикноклина (ВЦОП) вдоль канала на моменты $1T$, $1.5T$, $2T$, $2.5T$ и $3T$ (T — период входящей в канал волны). На момент $1T$ волна полностью вошла в канал. При этом на первом полупериоде она уже успела деформироваться: ее амплитуда уменьшилась в полтора раза, а полудлина увеличилась. После этого происходит перестройка: входящая волна формирует новую волну, передавая в нее часть энергии. Далее осуществляется эволюция этой волны с постепенным уменьшением амплитуды и увеличением длины. Волна при этом уплотняется и приобретает сложную многомодальную структуру.

На рис. 3 показаны результаты вейвлет анализа ВЦОП. Все отмеченные факты находят здесь свое отражение: Входящая волна (максимум в левом верхнем углу) далее трансформируется, ее спектр расширяется, а затем формируется волна, длина которой уменьшается с 1.7 до 1.1 м, при этом ее энергия растет до 8—9 секунды эксперимента. Далее она затухает. Вторая, длинная, волна (нижняя кривая) формируется за счет общего наклона глубины пикноклина вследствие того, что волна входит в канал с фазы понижения уровня, что создает наклон пикноклина и, соответственно, формирует длинноволновую моду, сопоставимую с общей длиной канала. Здесь так же происходит уменьшение длины волны во времени.

Для этих двух волн, на их максимумах энергии, совместно с образующейся между ними третьей волной (центральная кривая) осуществляется взаимодействие, которое может быть интерпретировано как нелинейное трехволновое взаимодействие. Такой вывод подтверждается соблюдением условий

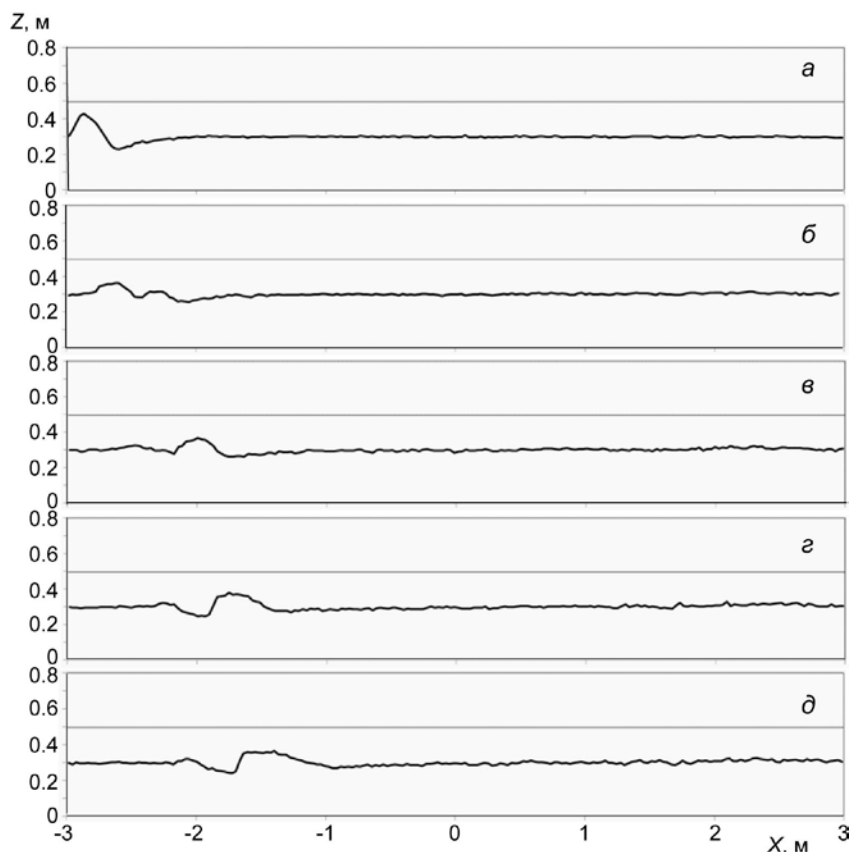


Рис. 2. Пространственное положение изопикны 1005.0 кг/м³ в разные моменты времени в долях периода волны. а — 1T; б — 1.5T; в — 2T; г — 2.5T; д — 3T для базового эксперимента.

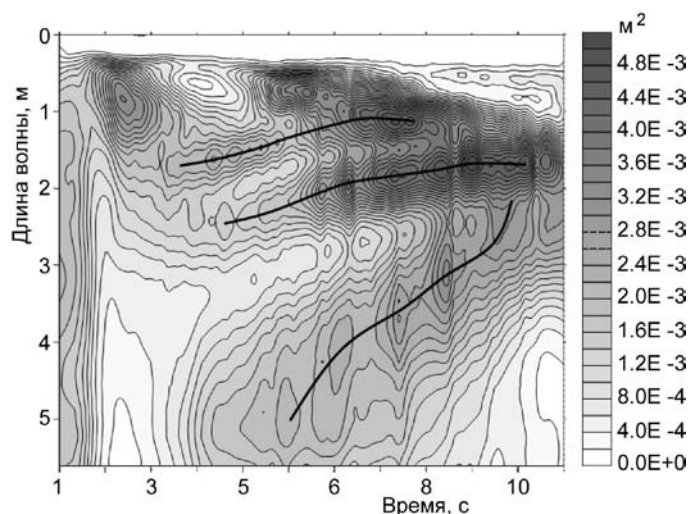


Рис. 3. Временная изменчивость интегрального по продольной оси области вейвлет-разложения колебаний пикноклина для базового эксперимента.

Шкала представлена для дисперсии колебаний пикноклина (м²). Кривые проходят через максимумы вейвлет-спектра и отражают эволюцию волны.

синхронизма [13], именно: $k_1 = (2\pi/1.1) = 5.71$, $k_2 = (2\pi/3) = 2.09$, $k_3 = (2\pi/1.7) = 3.69$, то есть, сумма $k_2 + k_3$ близка к k_1 , а на частотном спектре процесса (рис. 4) можно видеть 3 пика, соответствующие частотам 1.2, 2.4 и 3.6 рад.с⁻¹ и сумма первых двух частот равна третьей.

Третья волна достигает максимума потенциальной энергии (или квадрата амплитуды) на 9.5 секунды эксперимента, стационарируется по энергии и длине волны, а затем (с 11 секунды эксперимента) начинает затухать, теряя энергию и уменьшая свою длину. Рис. 3 содержит еще один экстремум в верхней, коротковолновой части рисунка. По-видимому, он объясняется образованием вихревых движений

и формируемых ими волновых особенностей у входа в канал, а также недостаточным пространственным разрешением модели. Подробнее об этом будет сказано ниже при обсуждении результатов одного из экспериментов.

Уплотнение волн и такой характер их эволюции может быть объяснен узким (по сравнению с амплитудой) слоем промежуточной плотности, а также — нелинейными взаимодействиями.

Для изучения этого явления были проведены численные эксперименты, в которых в операторе адвекции по x скорость переноса задавалась равной 0.2 и 0 м/с. Результаты этих экспериментов представлены на рис. 5, *а, б*. На рисунках пунктирными кривыми нанесены эволюционные кривые тестового эксперимента (с рис. 3).

В первом случае ($u = 0.2$ м/с) характер относительного положения экстремумов сохранялся, но затухание значительно замедлялось (рис. 5, *а*).

Время жизни волн и их энергия уменьшались с увеличением длины волны по сравнению с базовым экспериментом. Условия синхронизма не соблюдались. Во втором случае (рис. 5, *б*), при отсутствии адвекции по x , энергообмен между волнами практически отсутствовал, а общий уровень энергии был значительно выше, чем в базовом эксперименте. Третья волна, как и наиболее короткая, не возникала.

Был также выполнен эксперимент по отключению вертикальной составляющей оператора адвекции (рис. 5, *в*). В этом численном решении активнее, чем в базовом варианте развивалась наиболее длинная волна, причем время жизни волн и энергия были выше, чем в базовом эксперименте. Эти же характеристики для более коротких волн падали с уменьшением их длины, и были ниже, чем в базовом эксперименте. Еще одной особенностью решения было отсутствие волны малой длины, которую

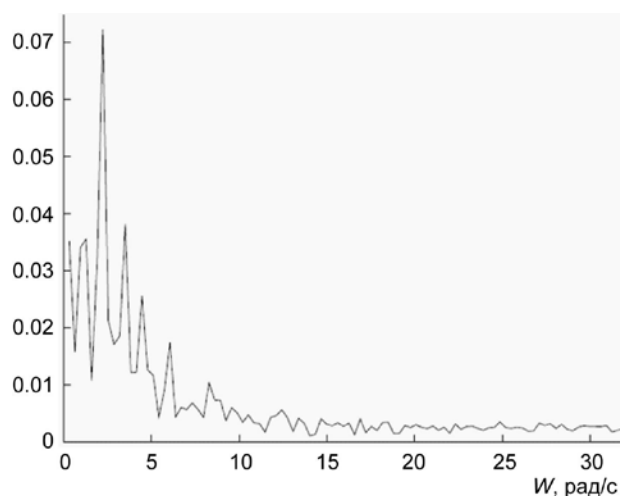


Рис. 4. Частотный спектр колебаний безразмерной плотности на центральной оси термоклина в точке на расстоянии 1 м от входной стенки канала.

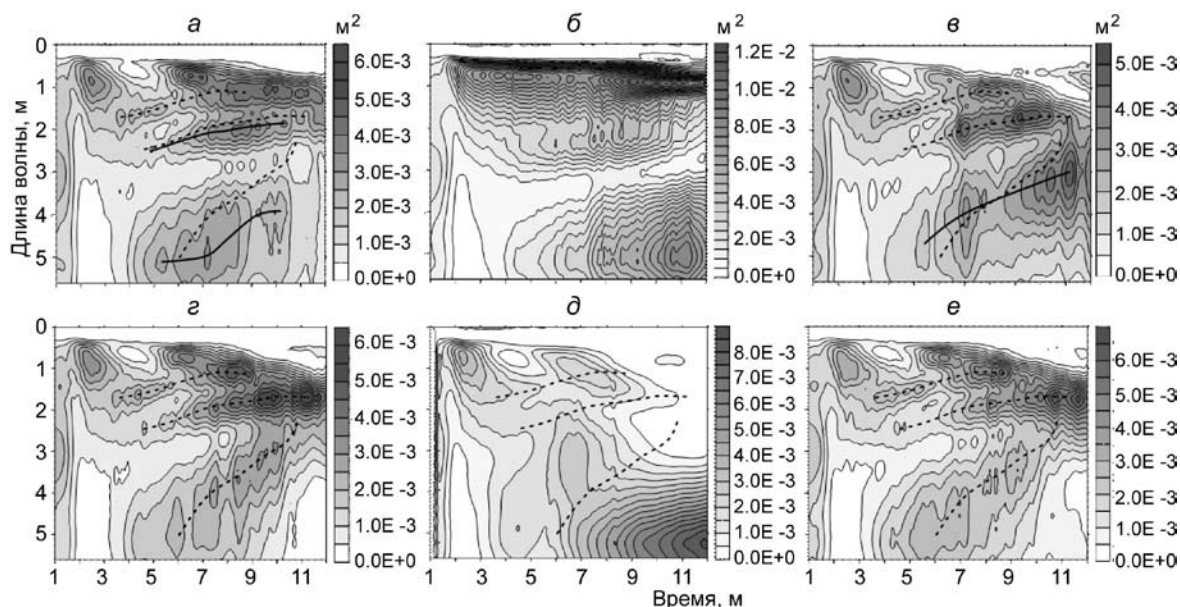


Рис. 5. Временная изменчивость интегрального по продольной оси области вейвлет-разложения колебаний пикноклина.

а — эксперимент с постоянной компонентой скорости вдоль канала ($U = 0.2$ м/с) в операторе адвекции; *б* — то же, $U = 0.0$ м/с; *в* — в операторе адвекции $W = 0$ м/с; *г* — эксперимент с условием скольжения на дне; *д* — эксперимент с постоянным (10^{-4} м²/с) коэффициентом диффузии; *е* — эксперимент с удвоенной толщиной промежуточного слоя.

Цветовая шкала представлена для дисперсии колебаний пикноклина (м²). Кривые проходят через максимумы вейвлет-спектра и отражают эволюцию волн. Пунктиром отмечено положение эволюционной кривой в базовом эксперименте (рис. 2).

мы связывали с недостатком пространственного разрешения и/или с образованием вихревой структуры, что, по-видимому, говорит о вертикальной ее ориентации. Этот процесс требует дальнейшего исследования.

Численный эксперимент по варьированию описания придонного трения (рис. 5, *з*) показал, что при замене условия прилипания на условия скольжения волновая картина имеет практически тот же характер, что и в базовом эксперименте. Единственным значимым отличием является интенсификация волновой динамики. Условия синхронизма соблюдаются.

На рис. 5, *д* представлены результаты численного эксперимента с линейным оператором диффузии. Для этого коэффициент диффузии $\nu_{SGS} = C_s^2 \Delta^2 |S| f_s(Ri)$ из (11) полагался равным 10^{-4} . В этом случае волна малой длины не образовалась, но получила развитие волна, связанная с вихревой особенностью, что подтверждает ранее высказывавшееся предположение. Наиболее длинная волна быстро затухла.

Наконец, на рис. 5, *е* отображены результаты эксперимента, в котором толщина пикноклина была увеличена вдвое. Картина эволюции и затухания внутренних волн аналогична таковой в базовом варианте, но уровень энергии (квадратов амплитуд) возрос примерно в полтора раза. Этот результат ожидаем, поскольку при увеличении толщины пикноклина при том же вертикальном распределении плотности ее градиент на пикноклине уменьшается, что должно привести к увеличению амплитуды вынужденных колебаний.

Численные эксперименты с моделью показали, что основным механизмом эволюции внутриволновой динамики для выбранного объекта является нелинейное трехволновое взаимодействие, в результате которого из входящей волны и длинной волны, связанной с особенностью форсинга, формируется третья, наиболее долгоживущая волна, куда происходит переток энергии из первых двух волн, которые при этом быстро затухают. Результирующая волна стационарируется, а ее затухание начинается позже.

Показано, что изменение баланса диффузионного и адвективного членов уравнения модели, определяющего нелинейное взаимодействие волн, влияют на скорость затухания и время жизни волн разной длины.

Литература

1. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 320 с.
2. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 304 с.
3. *Конюкова Г. Е., Показеев К. В.* Динамика морских волн. М.: Изд-во МГУ, 1985. 298 с.
4. *Tkatchenko I. V., Shin H.* The Generation of the Vortex Wake by Artificial obstacles // *Schiffbau Forschung*. 2004. Bd.43, N 2. P. 59—67.
5. *Сафрай А. С., Ткаченко И. В.* Численное моделирование гравитационных течений жидкости в наклонном канале // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2009. № 1. С. 21—30.
6. *Сафрай А. С., Ткаченко И. В.* Трехмерная негидростатическая модель вода-воздух. Численный эксперимент // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2013. Т. 6, № 1. С. 14—22.
7. *Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C.* A continuum method for modeling surface tension // *J. Comput. Phys*. 1992. V. 100. P. 335—354.
8. *Шахверди Г. Г.* Ударное взаимодействие судовых конструкций с жидкостью. СПб.: Судостроение, 1993. 256 с.
9. *Астафьева Н. М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук*. 1998. Т. 166, № 11. С. 1145—1170.
10. *Белоненко Т. В., Захарчук Е. А., Фукс В. Р.* Градиентно-вихревые волны в океане. СПб.: Изд. СПбГУ, 2004. 214 с.
11. *Витязев В. В.* Вейвлет-анализ временных рядов: учебное пособие. СПб.: Изд. СПбГУ, 2001. 58 с.
12. *Torrence C., Compo G. P.* A Practical Guide to Wavelet Analysis // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 1998. V. 79. P. 61—78.
13. *Миропольский Ю. З., Монин А. С.* Внутренние волны // *Океанология. Физика океана*. Т. 2: Гидродинамика океана. М.: Наука, 1978. С. 182—228.

Статья поступила в редакцию 17.09.2015 г.