

УДК 532.5.031

© Д. В. Чаликов

Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Россия
Технологический университет Свинбурна, Мельбурн, Австралия
dmitry-chalikov@yandex.ru

МАЛОИЗВЕСТНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Численные 2-*D* и 3-*D* модели поверхностных волн позволили воспроизвести и подтвердить большинство фактов, исследованных экспериментально и аналитически. Вместе с тем детальное моделирование обнаружило новые закономерности, не укладывающиеся в рамки традиционных представлений. В статье перечислены результаты, полученные в основном в Санкт-Петербургском филиале ИО РАН. Излагаются факты, которые ранее не обсуждались в статьях других авторов и не нашли адекватного объяснения. Эти факты во многом противоречат сложившимся представлениям. Результаты основаны на аккуратных численных моделях потенциального движения жидкости со свободной поверхностью. Гармонические волны быстро приобретают окаймляющие (*bound*) моды и превращаются в среднем в волны Стокса. Фурье анализ точных решений показывает, что реальнее поле является скорее суперпозицией волн Стокса с разными амплитудами и фазами, чем суперпозиция линейных мод. Существует предельное разрешение волнового спектра. Волновое поле есть результат суперпозиции неустойчивых мод, амплитуды которых быстро флуктуируют во времени под влиянием обратимых взаимодействий. Развитие экстремальных волн происходит за время порядка одного периода волны. Такая быстрая эволюция не может объясняться теорией модуляционной неустойчивости. Расчет вероятности экстремальных волн по линейной модели дает результаты близкие к расчетам по нелинейной модели. Поэтому роль нелинейности в генерации экстремальных волн, видимо, невелика. При совпадении волновых гребней происходит быстрое нелинейное взаимодействие волн, ведущее к резкому увеличению суммарной волны и вероятному опрокидыванию. Изрезанность двухмерного волнового спектра с высоким разрешением (наличие стационарных пиков и впадин) является типичным результатом прямого моделирования волн. Результаты численного моделирования существенно зависят от тонких деталей начальных условий, поэтому статистически обеспеченные результаты должны быть получены ансамблевым моделированием. Такое моделирование не подтверждает справедливость теории Хассельманна.

Ключевые слова: поверхностные волны, численное моделирование, стационарные решения, волны Стокса, неустойчивость волнового спектра, экстремальные волны, фокусировка энергии, ансамблевое моделирование.

D. V. Chalikov

Saint-Petersburg Department of the P. P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, St.-Petersburg, Russia
Swinburne University of Technology, Melbourne, Australia

UNFAMILIAR PROPERTIES OF SURFACE WAVES

Numerical 2-*D* and 3-*D* models of surface waves allowed to simulate and prove most of the facts studied both experimentally and analytically. In addition, a detailed modelling discovers new regularities beyond the scope of traditional concepts. The results obtained mostly at Saint-Petersburg Branch of Oceanography Institute RAS are listed. The facts, which were never discussed in papers of other authors and never explained are described. These facts are mostly contradict general views. The results are based on accurate numerical models of potential liquid motion with a free surface. Harmonic waves quickly obtain bound modes and, on the average, turn into Stokes waves. The Fourier analysis of exact solutions shows that a real field is rather a superposition of Stokes waves with different amplitudes and phases, than the superposition of linear modes. Wave field is the result of superposition of unstable modes whose amplitudes fluctuate in time under the influence of reversible interactions. Development of extreme waves occurs over the time of the order of one wave period. Such fast evolution cannot be explained by the theory of modulational instability. Calculations of extreme wave probability, using a linear model, provide the results close to the calculations by a non-linear model. This is why the role of the nonlinearity in generation of extreme waves is evidently not very significant. When crest merging occurs, a quick nonlinear wave interaction takes place, which leads to a sharp increase of the resulting wave and further

Чаликов Д. В. Малоизвестные свойства поверхностных волн // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 1. С. 8—16.

Chalikov D. V. Unfamiliar Properties of Surface Waves. Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika. 2016, 9, 1, 8—16.

possibility of overturning. A jaggy character of 2-D wave spectrum with high resolution (presence of steady peaks and holes) is a typical result of direct wave modeling. The results of the numerical modeling significantly depend on the minor details of initial conditions. Therefore, the results confirmed statistically should be obtained by ensemble modeling. Such modeling, in particular, does not prove correctness of the Hasselmann's theory.

Key words: surface waves, numerical modeling, stationary solutions, Stokes waves, instability of wave spectrum, extreme waves, energy focusing, ensemble modeling.

В статье перечислены результаты, полученные в основном в Санкт-Петербургском филиале Института океанологии Российской академии наук.

Двухмерные уравнения потенциального движения жидкости со свободной поверхностью решаются обычно в конформных координатах. Конформный метод оказывается очень эффективным, поскольку форма эволюционных уравнений усложняется очень незначительно, зато уравнение Лапласа в новых координатах сохраняет свою форму, благодаря чему решение для потенциала скорости может быть представлено в аналитической форме. Поэтому решение уравнений может быть полностью основано на Фурье преобразовании с подсчетом нелинейности на сгущенной конечно-разностной сетке. В результате двухмерная модель поверхностных волн оказывается наиболее точной моделью геофизической гидродинамики, описывающей реальное явление. Единственной причиной, по-видимому, снижающей популярность этого подхода, является необходимость некоторого знакомства с дифференциальной геометрией.

Трехмерные уравнения гидродинамики решаются методом, разработанным в основном автором данной статьи. Метод основан на прямом решении трехмерного уравнения для потенциала скорости с разделением решения на аналитическую (линейную) и нелинейную составляющие.

Ниже кратко перечисляются некоторые свойства поверхностных волн, установленных на основе математического моделирования. Каждое свойство выделено в конце разделов курсивом.

Стационарные решения. Первым крупным результатом, полученным с конформной моделью, следует считать разработку методов расчета стационарных решений уравнений потенциального движения со свободной поверхностью: гравитационных волн на глубокой воде (волн Стокса, [1]), гравитационных волн на мелкой воде, гравитационно-капиллярных волн и капиллярных волн (волн Краппера, [2]). Эти результаты изложены в работах [3—6]. Предложенные ранее многочисленные методы расчета стационарных решений основывались на плохо сходящихся разложениях и были очень неэкономичны. Предложенные нами схемы рассчитывают стационарные решения с неограниченной точностью и скоростью на два порядка выше, чем традиционные схемы. Заметим, что алгоритмы для расчета гравитационных и капиллярно-гравитационных волн различны. Известно, что решение уравнений Навье—Стокса не имеет предельной формы решения уравнений Эйлера при уменьшении вязкости.

Точно так же решение для гравитационно-капиллярных волн не сходится к решению для гравитационных волн при стремлении коэффициента поверхностного натяжения к нулю, поскольку эффекты поверхностного натяжения описываются производными второго порядка.

Стационарные решения как средство проверки нестационарных моделей. Существование трех видов стационарных решений для полных уравнений потенциального движения со свободной поверхностью представляет уникальную возможность проверки нестационарных моделей [3—5]. Для расчетов в качестве начальных условий задается одно из стационарных решений, и далее проводится интегрирование по времени с полной стационарной моделью. Если модель (включая численную схему и программирование) верна и стационарное решение устойчиво к возмущениям, заданная волна должна двигаться с верной фазовой скоростью, не изменяя своей формы. В общем случае мы не можем утверждать, что стационарное решение устойчиво. Например, волны Стокса оказываются нестабильны: развивается неустойчивость Бенджамина—Фейера [7], выражающаяся в первичном экспоненциальном росте промежуточных мод и последующей гомогенизации спектра [8]. При этом не принципиально, заданы ли первичные малые возмущения намеренно или они порождаются очень малыми ошибками аппроксимации; это всего лишь вопрос времени распада стационарного решения. В любом случае возникающие возмущения исключают возможность проверки модели. Простой способ обойти

эту трудность состоит в удалении спектральных интервалов, в которых могут развиваться возмущения путем задания начальной волны на последовательных волновых числах $k = 1, 2, 3 \dots$. Этот прием не дискриминирует проверку, поскольку при любой погрешности модели происходит искажение спектра.

Для оценки устойчивости численного воспроизведения стационарных волн рассматривались фазовая скорость и эволюция амплитуд составляющих мод. Если волна стационарна, амплитуды составляющих мод должны сохранять свою величину с очень большой точностью, а фазовая скорость каждой моды должна быть в точности равна фазовой скорости главной моды. Волна Краппера задавалась с крутизной $A = 0.7$. Амплитуды ее мод сохранялись с относительной точностью 10^{-5} , фазовая скорость совпадала с теоретической фазовой скоростью амплитуды с шестью десятичными знаками. Аналогичные результаты были получены для крутых гравитационно-капиллярных волн. Наиболее важные для нас волны Стокса воспроизведены с очень высокой точностью: фазовая скорость совпадает с теоретической скоростью с шестью десятичными знаками, а амплитуды сохранялись вплоть до порядка 10^{-20} [8, 9].

Проверка модели, основанная на стационарных решениях, является полной и нетривиальной. Она доказывает высокую эффективность конформного подхода и его пригодность для исследования нелинейных свойств двухмерных волн.

Реальность волн Стокса. В последнее время возникло мнение, что волны Стокса являются не просто интересным математическим объектом и средством проверки численных моделей. Они начинают играть важную роль в исследовании физики поверхностных волн. Традиционный подход к исследованию нелинейных свойств многомодового волнового процесса основан на предположении, что реальное волновое поле может быть представлено как суперпозиция линейных волн. Такой подход, используемый в знаменитой работе Хассельманна [10], лежит в основе моделирования нелинейной трансформации волнового спектра. Этот существенно спектральный подход предполагает, что фазы всех мод отвечают линейному дисперсионному соотношению и распределены равномерно и случайно. В действительности фазовые скорости некоторых мод равны фазовой скорости несущей волны, поскольку волновое поле является смесью свободных волн и присоединенных мод. Присоединенные моды не являются волнами, а всего лишь «кирпичиками», используемыми для построения нелинейной формы (поэтому термин «окаймляющие» волны затемняет суть дела). Даже визуальные наблюдения морской поверхности подтверждают, что реальные волны заострены, а их подошвы сглажены.

Фурье анализ точных решений [9] показывает, что реальное поле является скорее суперпозицией волн Стокса с разными амплитудами и фазами, нежели суперпозицией линейных мод.

Загадочные свойства «верхних» конформных координат. Формально конформные координаты существуют и для верхней части области. Казалось бы, с точки зрения волновой теории, они не имеют практической ценности (один рецензент заметил: «Там же нет воды!»). Тем не менее эти координаты обнаруживают неожиданные свойства: волна Стокса, перенесенная интерполяцией из декартовых координат в верхние конформные координаты, оказывается почти совпадающей с линейной модой с тем же волновым числом и амплитудой [9]. Можно далее размышлять о том, что уравнение потенциально-го движения жидкости со свободной поверхностью, записанное в верхних координатах, оказывается почти линейным. Это предположение не так уж и фантастично, поскольку уравнения волновой модели являются чисто поверхностными, т. е. они не содержат вертикальной координаты. Далеко идущих выводов из этого факта пока не сделано. Однако обнаруженная закономерность дала чисто алгоритмические преимущества при нахождении разложения волнового поля по модам Стокса. В декартовых координатах эта задача может решаться итерациями с последовательной минимизацией невязки, т. е. достаточно громоздко.

Согласно найденной закономерности, волновое поле, как совокупность волн Стокса, может быть задано как суперпозиция линейных мод в верхней системе координат, перенесенная в декартовы координаты с помощью точной периодической интерполяции.

Трансформация гармонических волн. С помощью конформной модели можно точно решить очень простую задачу: исследовать эволюцию единственной моды, заданной в начальных условиях как линейная волна [11]. Линейная волна не является решением точных уравнений потенциальной теории волн, поэтому даже при отсутствии возмущений она претерпевает сложную эволюцию, порождая дискретный спектр нестационарных волн. Разумеется, гармонические волны являются удобным базисом

для представления волнового поля, однако при вычислении их взаимодействий, в особенности, необратимых взаимодействий, обнаруженные выше свойства могут иметь пока непредсказуемые последствия. Проведенные расчеты показывают, что гармонические волны неустойчивы и склонны к распаду. По мере увеличения начальной крутизны волны скорость развития этой неустойчивости увеличивается, а при начальной крутизне AK , превышающей 0.28, неустойчивость приводит к появлению неоднородной поверхности и обрушению волны [12].

Трансформация гармонических волн заканчивается появлением новых флуктуирующих мод на кратных волновых числах. При осреднении по времени величины амплитуд этих мод весьма близки к амплитудам волн Стокса.

Существует ли предел разрешения волнового спектра? Располагая реализацией волновой поверхности в физическом пространстве, всегда можно вычислить волновой спектр. Обратная процедура — восстановление волновой поверхности по спектру — невозможна, поскольку утрачена информация о фазах. Тем не менее, если предположить, что фазы являются случайной функцией волнового числа, поверхность, отвечающая заданному спектру, может быть восстановлена. При этом нет никакой гарантии, что восстановленная поверхность будет обладать теми же статистическими характеристиками (например, величинами высоких моментов), что и исходная поверхность, использованная для построения спектра. Положение еще больше осложняется, если спектр рассматривается как функция, достаточно гладкая для того, чтобы ее можно было представить с разным разрешением. Очевидно, что восстановленная по более плотному спектру поверхность будет обладать совершенно другими свойствами, поскольку при увеличении разрешения и сохранении энергии амплитуда каждой моды оказывается меньше.

Возникает естественный вопрос: «Влияет ли спектральное разрешение на эволюцию спектра?» В наиболее простом виде эффект разрешения может быть исследован на примере двух мод, заданных в начальных условиях на соседних волновых числах с разным относительным расстоянием между ними $\delta = 2/(K + 1)$. Такие расчеты с конформной моделью были проведены в [13]. Результаты оказались достаточно неожиданными. Прежде всего, на волновом числе $k = 1$ за счет нелинейного взаимодействия возникала новая мода. В результате взаимодействия этой моды с заданными в начальных условиях двумя модами генерировался более или менее плотный спектр, и наблюдался сдвиг спектра в сторону низких волновых чисел. В целом этот результат надо считать неестественным, поскольку волновое число $k = 1$ характеризует разрешение модели и ничего больше. Бесконечно близкие друг к другу моды могут посылать энергию на бесконечные масштабы, т. е. формировать диссипацию энергии.

Оказалось, однако, что этот эффект существенен только для очень близких друг к другу мод, и он практически отсутствует при умеренном разрешении.

Следовательно, существует предельное разрешение волнового спектра. Использование более высокой дискретизации влечет за собой появление артефактов.

Неустойчивость волнового спектра. Во многих исследованиях волн предполагается, что волновое поле может быть представлено как совокупность линейных мод со случайными фазами. При этом считается, что такая композиция устойчива, т. е. сохраняется достаточное время для всех мод. Это утверждение легко проверить конформной моделью, проведя моделирование эволюции волновой поверхности, характеризуемой более или менее реалистичным спектром. Такие расчеты были проведены в работе [9].

На рис. 1 даны вычисленные фазовая скорость каждой моды и ее дисперсия (a), а также время жизни T_k мод, вычисленное по формуле $T_k = E_k(dE_k/dk)^{-1}$ (b). Как видно, лишь волны в окрестности волнового пика удовлетворяют линейному дисперсионному соотношению, но начиная с волновых чисел $k/k_p > 2$ осредненная фазовая скорость не зависит от волнового числа и сильно флуктуирует во времени. Этот результат был впервые обнаружен экспериментально и объяснен в знаменитой работе [14]. Отклонение от линейного дисперсионного соотношения объясняется тем, что на каждом волновом числе присутствуют окаймляющие моды для своих несущих волн и свободные волны, подчиняющиеся дисперсионному соотношению, поэтому расчет дает некоторые средневзвешенные значения фазовой скорости. Малые значения «времени жизни» мод (рис. 1, b) указывают на то, что амплитуды мод неустойчивы, видимо, в результате обратимых волновых взаимодействий.

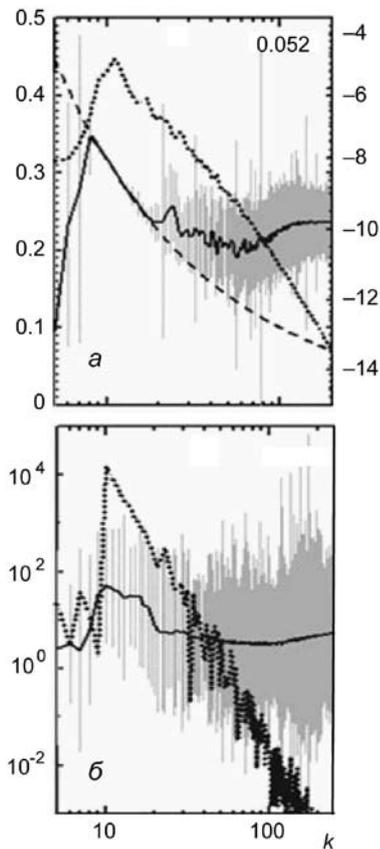


Рис. 1. Демонстрация неустойчивости волновых мод. *а* — сплошная кривая — вычисленная фазовая скорость, серые отрезки характеризует ее дисперсию; пунктир — линейная фазовая скорость; *б* — сплошная кривая — время жизни каждой моды. Точечная линия характеризует волновой спектр.

Таким образом, волновое поле есть результат суперпозиции неустойчивых мод, амплитуды которых быстро флуктуируют во времени.

Быстрое развитие и кратковременность экстремальных волн.

Принято считать, что быстрый (по сравнению хассельмановским) механизм трансформации волнового спектра предложен теорией модуляционной неустойчивости, известной в оригинале как теория неустойчивости Бенджамина—Фейера [7]. Суть этой теории весьма проста: в одномерном цуге волн развиваются новые моды, что в конечном итоге приводит к развитию плотного волнового спектра. Согласно результатам авторов теории и численных расчетов [8], развитие новых мод происходит сравнительно медленно. Скорость развития может быть представлена масштабом времени T_{bf} зависимость которого от крутизны несущей волны дана на рис. 2.

Данные на рисунке построены по результатам численных исследований неустойчивости Бенджамина—Фейера. Масштаб времени выражен в периодах несущей волны. Как видно, для типичной крутизны морских волн ($AK = 0.1$) масштаб времени оказывается порядка 100 периодов несущей волны. Следовательно, общепринятый сценарий развития экстремальной волны предполагает, что одна из волн спектра неизвестно по каким причинам начинает отбирать энергию от спектра

трагального окружения, медленно растет и, в конце концов, достигает очень больших значений. Никаких данных о том, что такой процесс реализуется в природе или лаборатории, не существует. Численные эксперименты с точной трехмерной моделью, наоборот, показывают, что формирование экстремальной волны происходит очень быстро — за время порядка одного периода. На рис. 3 показаны примеры лагранжевой эволюции высоты волны, достигающей экстремальных значений. Как видно, полная эволюция высоты волны от умеренных значений до значений, характерных для экстремальной («freak») волны, составляет порядка одного периода волны. В ходе численных экспериментов было обнаружено, что практически все случаи возникновения экстремальной волны были аналогичны примерам, приведенным на рисунке. Напротив, медленный рост одной моды, с превращением ее в экстремальную волну, не наблюдался ни разу.

Мы приходим к выводу, что развитие экстремальных волн происходит за время порядка одного периода волны. Такая быстрая эволюция не может объясняться теорией модуляционной неустойчивости.

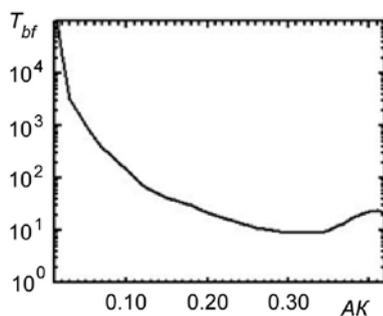


Рис. 2. Зависимость масштаба времени T_{bf} для развития неустойчивости Бенджамина—Фейера от крутизны несущей волны.

Линейный механизм генерации экстремальных волн.

Увеличение высоты волны, показанное на рис. 4, в наибольшей степени напоминает простой эффект суперпозиции гребней волн. Интегральная повторяемость полной высоты волны (т. е., высоты от подошвы до гребня) рассчитывалась двумя методами. Первый был основан на результатах длительных численных экспериментов с двумерной (конформной) и трехмерной моделями [15, 16].

Второй метод состоял в расчете той же самой вероятности по ансамблю волновых полей, полученных суперпозицией линейных мод со случайными фазами и спектром, аналогичном спектру, рассчитанному по полным нелинейным моделям. Как видно, все подходы дают достаточно высокую вероятность экстремальных волн. Для двумерного волнения вероятность экстремальных волн выше, чем

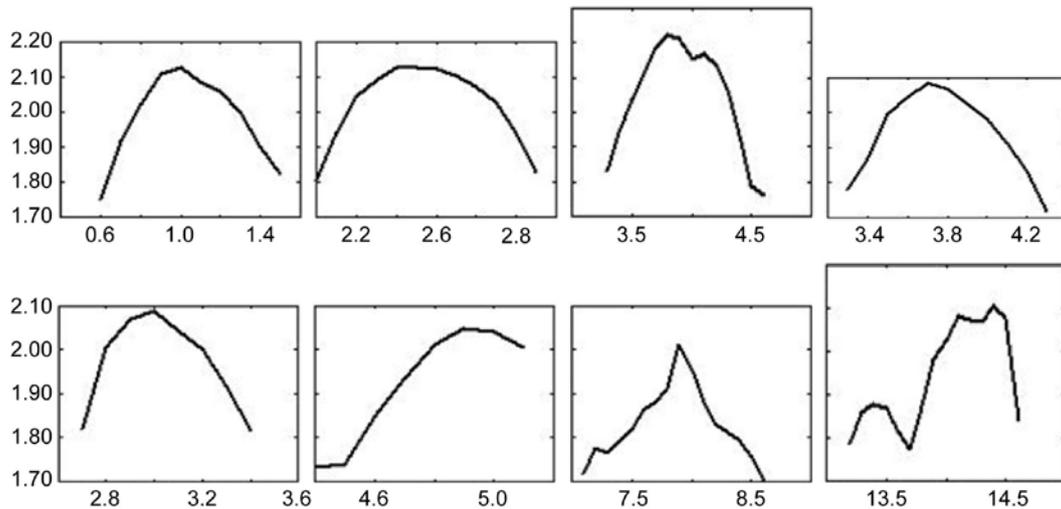


Рис. 3. Лагранжева эволюция высоты экстремальных волн (нормированная высотой значительной волны), рассчитанная в численных экспериментах с трехмерной моделью. Горизонтальная ось соответствует времени, выраженном в периодах волны пика.

для одномерного волнения. Причины этого скорее геометрические: ближайшие максимум и минимум возвышения не обязаны находиться в направлении распространения волнения, т. е., при выборе максимальной волны возникает больше степеней свободы.

Расчет вероятности экстремальных волн по линейной модели дает результаты, близкие к расчетам по нелинейной модели. Поэтому роль нелинейности в генерации экстремальных волн, видимо, невелика.

Фокусировка энергии при совпадении волновых гребней. Численное исследование процесса опрокидывания волн [17] показало, что ни одна из динамических, кинематических или геометрических характеристик не может быть надежным предиктором опрокидывания волны, так что эволюция этих характеристик характеризует само опрокидывание, но не объясняет его механизма. Между тем, даже визуальные наблюдения показывают, что опрокидыванию всегда предшествует заострение волновых гребней. Этот эффект не может быть объяснен гребневой неустойчивостью [18], которая относится лишь к волнам предельной крутизны, в то время как заострение гребней, сопровождаемое фокусировкой энергии, происходит даже при небольшой крутизне.

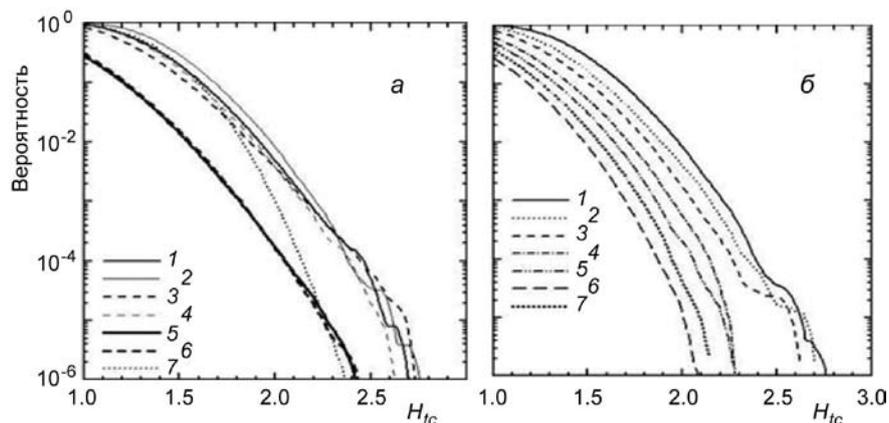


Рис. 4. Повторяемость высоты волны от подошвы до гребня.

a — интегральная вероятность полной высоты волны H_{tc} : 1, 2 — умеренное разрешение модели; 3, 4 — высокое разрешение; 1, 3 — полная трехмерная модель; 2, 4 — суперпозиция двухмерных мод; 5, 6 — одномерный подсчет вероятности по трехмерной модели (5 — полная нелинейная трехмерная модель, 6 — суперпозиция одномерных мод); 7 — распределение Релея; *b* — интегральная вероятность полной высоты волны H_{tc} для разных угловых распределений $\cos^p \varphi$: 1 — $P = 4$; 2 — $P = 8$; 3 — $P = 16$; 4 — $P = 64$; 5 — $P = 256$; 6 — 1-D полная трехмерная модель; 7 — суперпозиция одномерных линейных мод.

Эффекты одномерной и двухмерной фокусировки исследовались численно и в лаборатории [19—22]. В этих работах отмечено, что при совпадении гребней волн с разными волновыми числами высота комбинированной волны может превышать высоту, возможную при линейной суперпозиции. Упомянутые работы рассматривают это явление на примере специально подобранных параметров, характеризующих отдельные случаи.

Ниже показаны результаты статистических испытаний эффекта фокусировки. Для расчетов использовалась конформная двухмерная модель, описывающая однонаправленные волны. В качестве начальных условий задавались две моды с разными амплитудами a_1 и a_2 и волновыми числами. Расчет проводился на период, равный десяти периодам младшей моды, или до наступления опрокидывания. Небольшой период расчета был выбран намеренно для исключения неустойчивости Бенджамина—Фейера (рис. 2) Нелинейный эффект суперпозиции характеризуется *параметром превышения*:

$$E = \frac{\max(\eta) - \min(\eta)}{2(a_1 + a_2)},$$

который в линейном процессе не может превышать значения $E = 1$. Величина E зависит от начальной крутизны волновой поверхности $(\eta_x^2)^{1/2}$.

Как видно из рис. 5, эффект нелинейной фокусировки является типичным явлением в волновых процессах. Он возникает как для относительно крутых волн, так и для волн с малой крутизной. Значения $E > 1$ достигнуты в 75 % случаев. Наибольшие значения $E > 1.2$ получены при крутизне порядка 0.1. Дальнейшее ослабление фокусировки объясняется тем, что волна начинает опрокидываться до достижения больших значений превышения. Доля случаев с опрокидыванием увеличивается с ростом крутизны, и при крутизне больше 0.14 все процессы заканчиваются опрокидыванием.

Возникает естественный вопрос, может ли эффект фокусировки иметь отношение к генерации экстремальных волн? Ответ на этот вопрос скорее отрицательный. Эффект превышения сравнительно невелик, тогда как экстремальные волны достигают очень большой высоты. Экстремальные волны — очень редкое явление, а фокусировка происходит постоянно. Вместе с тем, фокусировка почти наверно является главной причиной опрокидывания волн.

При совпадении волновых гребней происходит быстрое нелинейное взаимодействие волн, ведущее к резкому увеличению суммарной волны и вероятному опрокидыванию.

Изрезанность двумерного волнового спектра. Волновые спектры являются наиболее распространенным представлением волнового поля. Двухмерные волновые спектры (в пространстве волновых чисел или в пространстве частота/угол) используются для расчета разнообразных физических характеристик, таких как приток и диссипация энергии или нелинейные межволновые взаимодействия. При этом всегда предполагается, что спектр является более или менее гладким. Спектральное разрешение

прогностических волновых моделей столь мало, что другая интерпретации спектра невозможна. Прямое моделирование волн (которое основано не на спектре, а на воспроизведении эволюции поля скорости и возвышения) допускает намного более высокое разрешение, и тут исследователей ожидают сюрпризы. Оказалось, что именно гладкого волнового спектра не существует. В качестве примера дадим результаты численного моделирования эволюции двухмерного поля, основанного на полной трехмерной модели [16].

На рис. 6 показан типичный результат: волновой спектр трансформируется в почти дискретный спектр, состоящий из отдельных пиков и впадин. Их расположение

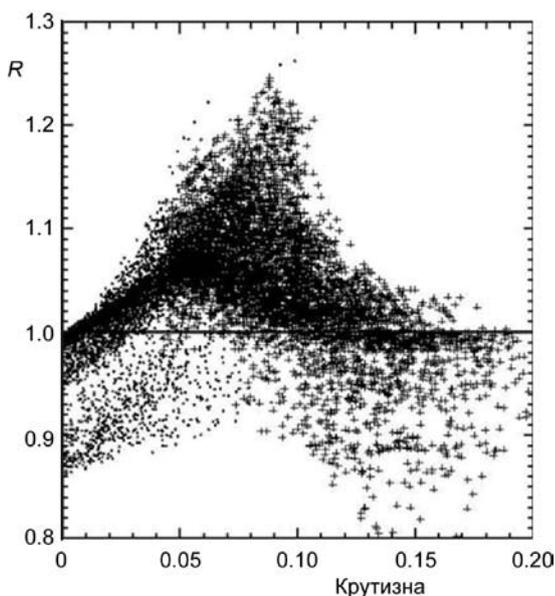


Рис. 5. Зависимость параметра превышения от крутизны заданного в начальных условиях волнового поля. Случаи опрокидывания отмечены знаком +; случаи, когда опрокидывание не произошло за первые 10 периодов — точкой.

в пространстве волновых пиков более или менее случайно. Этот эффект ставит вопрос: «Что же в действительности характеризует спектр?» Вполне возможно, что высокое разрешение для спектра просто не имеет смысла. Этот вопрос пока остается открытым, и мы можем констатировать, что *изрезанность волнового спектра с высоким разрешением является типичным результатом прямого моделирования волн.*

Ансамблевое моделирование волнения. Можно попытаться дать очень простое объяснение дискретности спектра, показанного на рис. 6. Разумеется, спектр трансформируется в результате нелинейных взаимодействий. Этот процесс традиционно описывается теорией Хассельманна [10], согласно которой энергией обмениваются моды, удовлетворяющие резонансным условиям. При фиксированной сетке в пространстве волновых чисел эти комбинации мод фиксированы, следовательно, моды, участвующие в резонансе, получают (или теряют) энергию, а моды, находящиеся далеко от условий резонанса, должны свои амплитуды сохранять. Следовательно, если в начальных условиях задан один и тот же спектр, а поле в физическом пространстве задается с различными наборами случайных фаз, конечный результат должен быть одинаков, независимо от начальных условий. Это утверждение очень легко проверить путем многократного численного моделирование эволюции спектра для одинаковых начальных спектральных условий, т. е., на основе так называемого ансамблевого моделирования, совершенно аналогичного ансамблевому моделированию, используемому для среднесрочного прогноза погоды.

Результаты этого моделирования обескуражили. При условии точного сохранения энергии, волновые спектры, рассчитанные в каждом варианте, оказались совершенно различными. Этот результат наиболее наглядно демонстрируется на рис. 7, где точками обозначены положения локальных максимумов спектра.

Таким образом, эволюция спектра определяется не фиксированными резонансными комбинациями мод. Этот результат можно было бы объяснить флуктуациями частот мод, которые не обязаны подчиняться (и не подчиняются) линейному дисперсионному соотношению. За счет этого эффекта резонансы могут быть «размазаны» по некоторой малой области. Это объяснение, однако, несостоятельно,

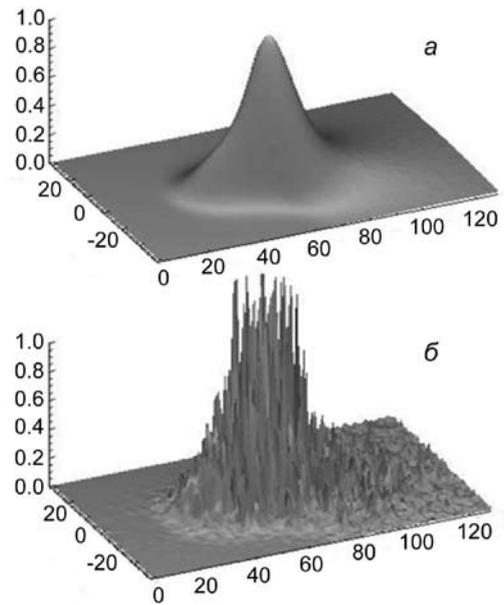


Рис. 6. Двухмерный волновой спектр в пространстве волновых чисел. *a* — начальные условия для спектра; *б* — волновой спектр, полученный после интегрирования модели на 118 периодов волны пика.

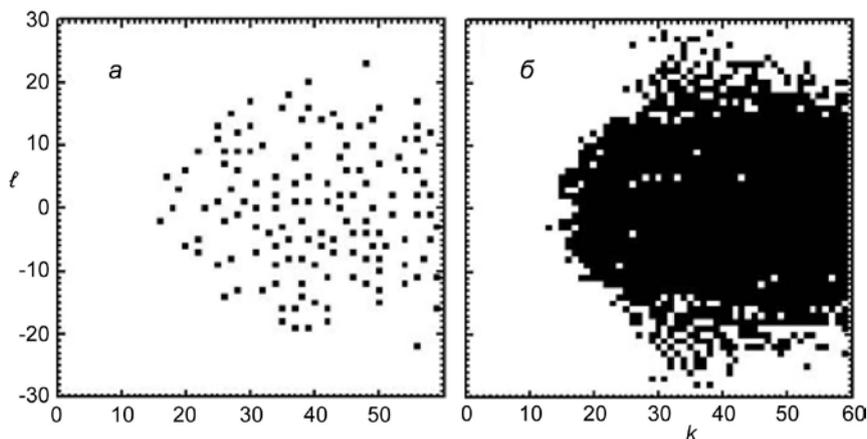


Рис. 7. Демонстрация зависимости нелинейных взаимодействий от начального набора фаз волновых мод. Положение локальных максимумов единичного спектра в пространстве волновых чисел (k, l) — *a*; во всех 50 параллельных расчетах — *б*.

поскольку при таком процессе волновой спектр должен быть гораздо более гладким. Тем не менее полученные спектры имеют отчетливо дискретную природу. Приходится признать, что полученные результаты никак не могут быть объяснены с позиции теории Хассельманна. Это неудивительно, поскольку теория Хассельманна основана на большом числе упрощающих предположений, главное из которых — предположение о малости амплитуды.

Результаты численного моделирования существенно зависят от тонких деталей начальных условий, поэтому статистически обеспеченные результаты должны быть получены ансамблевым моделированием. Такое моделирование, в частности, не подтверждает справедливость теории Хассельманна.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ, грант 14-05-0042214 (Реализация комплексных научных программ организаций).

References

1. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves. Trans. Cambridge Philos. Soc. 8, 441—445; *Math. Phys. Pap.* 1847, 1, 197—229.
2. Crapper G. D. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude. *Journal of Fluid Mech.* 1957, 96, 417—445.
3. Chalikov D., Sheinin D. Numerical modeling of surface waves based on principal equations of potential wave dynamics. *Technical Note.* 1996, NOAA/NCEP/OMB, 54 p.
4. Chalikov D., Sheinin D. Direct Modeling of One-dimensional Nonlinear Potential Waves. Nonlinear Ocean Waves. Ed. W. Perrie. *Advances in Fluid Mechanics.* 1998, 17, 207—258.
5. Sheinin D., Chalikov D. Hydrodynamical modeling of potential surface waves. *Problems of hydrometeorology and environment on the eve of XXI century. Proceedings of international theoretical conference.* St.-Petersburg, June 24—25, 2001. St.-Petersburg, Hydrometeoizdat. 305—337.
6. Chalikov D., Sheinin D. Numerical simulation of surface waves based on equations of potential wave dynamics. *Proc. ONR, Ocean Waves Workshop.* 1994, Tucson, Arizona.
7. Benjamin T. B., Feir J. E. The Disintegration of Wave Trains in Deep Water. *J. Fluid. Mech.* 1967, 27, 417—430.
8. Simulation of Benjamin-Feir instability and its consequences. *Physics of Fluid.* 2007, 19, 016602-15.
9. Chalikov D. Statistical properties of nonlinear one-dimensional wave fields. *Nonlinear processes in geophysics.* 2005, 12, 1—19.
10. Hasselmann K. On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 1. *J. Fluid Mech.* 1962, 12, 481—500.
11. Chalikov D. V. Harmonic Wave Deep Water Transformatio. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika.* 2010, 9, 3, 14—21 (in Russian).
12. Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface. *Journ. Comp. Phys.* 2005, 210, 247—273.
13. Babanin A. V., Babanina A., Chalikov D. Interaction of surface waves at very close wavenumbers. *Ocean dynamics.* 2014, 64, 7, 1019—1023.
14. Yuen H. C., Lake B. M. Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves. *Adv. in Appl. Mech.* 1982, 22, 67—229.
15. Chalikov D., Babanin A. V. Three-dimensional periodic fully-nonlinear potential waves. *Proceedings of the ASME 2013 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE2013*, July, 9—14, 2013, Nantes, France, 8 p. DOI: 978-0-7918-5533-1.
16. Chalikov D., Babanin A. V., Sanina E. Numerical Modeling of Three-Dimensional Fully Nonlinear Potential Periodic Waves. *Ocean dynamics.* 2014, 64, 10, 1469—1486.
17. Chalikov D., Babanin A. V. Simulation of Wave Breaking in One-Dimensional Spectral Environment. *Journal Phys. Ocean.* 2012, 42, 11, 1745—1761.
18. Longuet-Higgins M. S., Tanaka M. On the crest instabilities of steep surface waves. *J. Fluid. Mech.* 1997, 336, 51—68.
19. Johannessen T. B., Swan C. A numerical transient water waves. Part 1: A numerical method of computation with comparison to 2-D laboratory data. *Appl. Ocean Res.* 1997, 19, 293—308.
20. Johannessen T. B., Swan C. A laboratory study of the focusing of transient and directionally spread surface water waves. *Proc. R. Soc. Lond.* 1997, A457, 971—1006.
21. Johannessen T. B., Swan C. On the nonlinear dynamics of wave groups produced by the focusing of surface-water waves. *Proc. R. Soc. Lond.* 2003, A459, 1021—1052.
22. Brown M. G., Jensen A. Experiments in focusing unidirectional water waves. *J. Geophys. Res.* 2001, C106, 16917—16928.

Статья поступила в редакцию 31.08.2015 г.