

УДК 551.465

© Н. П. Кузьмина

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва

kuzmina@ocean.ru

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ ОБРАЗОВАНИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ИНТРУЗИЙ В АРКТИЧЕСКОМ БАССЕЙНЕ

Найдены некоторые аналитические решения задачи о трехмерной неустойчивости слабого геострофического течения с линейным сдвигом скорости с учетом вертикальной диффузии плавучести. Анализ основан на уравнении эволюции потенциального вихря в длинноволновом приближении: горизонтальный масштаб возмущений значительно превышает локальный радиус деформации Россби. Выдвигается гипотеза, что полученные решения могут быть полезны для описания устойчивых и неустойчивых возмущений планетарного масштаба применительно к полярным районам океана, в частности к Арктическому бассейну, где наблюдаются слабые бароклинные фронты, временная изменчивость которых может превышать несколько лет, и влияние бета-эффекта на динамику возмущений практически отсутствует. Неустойчивые (растущие со временем) решения применяются для описания образования крупномасштабных интрузий, которые наблюдаются в Арктическом бассейне. Двойная диффузия, которая является типичным и важным механизмом образования интрузий в океане, для построения решений учитывается с помощью простейшей параметризации в рамках модели. Проводится сравнение решений, полученных с учетом и без учета двойной диффузии, со структурными особенностями наблюдаемого в Евразийском бассейне крупномасштабного интрузионного расслоения. Устойчивые (затухающие со временем) решения описывают возмущения, которые в отличие от волн Россби могут двигаться не только на запад, но и на восток, в зависимости от знака линейного сдвига геострофической скорости. Высказывается мнение, что найденные аналитические решения могут быть полезны для проверки численных решений задач на собственные значения, посвященные анализу трехмерной неустойчивости бароклиновых фронтов с учетом вертикальной диффузии плавучести. Более того, полученные решения дают аналитические соотношения для фазовых скоростей и инкрементов роста или затухания возмущений, которые в задачах на собственные значения, как правило, точно определить не удается.

Ключевые слова: интрузии, неустойчивость фронтов, модели интерливинга.

N. P. Kuzmina

P. P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Moscow, Russia

ABOUT ONE HYPOTHESIS OF GENERATION OF LARGE-SCALE INTRUSIONS IN THE ARCTIC OCEAN

Some analytical solutions are found for the problem of three-dimensional instability of a weak geostrophic flow with linear velocity shear taking into account the vertical diffusion of buoyancy. The analysis is based on the potential vorticity equation in a long-wave approximation when the horizontal scale of disturbances is taken much larger than the local baroclinic Rossby radius. It is hypothesized that the solutions found can be applied to describe stable and unstable disturbances of planetary scale with respect, especially, to the Arctic Basin where weak baroclinic fronts with typical temporal variability period of the order of several years or more are observed and the beta-effect is negligible. The unstable (growing with time) solutions are applied to describe the large-scale intrusions typical for the Arctic Basin. Double diffusion being typical and important driver of oceanic intrusions is included to the model by means of a simplest parameterization. Solutions obtained with and without effect of double diffusion are compared with structural features of large-scale intrusive layers observed in the Arctic Basin. Stable (decaying with time) solutions describe disturbances that, in contrast to the Rossby waves, can propagate both to the west and east depending on the sign of linear shear of geostrophic velocity. It is supposed that the analytical solutions found can be useful to validate numerical solutions of the eigen value problems devoted to the analysis of three-dimensional instability of slow baroclinic fronts with the consideration of vertical diffusion of buoyancy. Moreover, the analytical solutions obtained give analytical formulas

Кузьмина Н. П. Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 2. С. 15—26.

Kuzmina N. P. About one hypothesis of generation of large-scale intrusions in the Arctic Ocean. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika*. 2016, 9, 2, 15—26.

for the phase velocities and growth/decay rates of disturbances that cannot, as a rule, be found exactly from numerical solutions of the eigen value problems.

Key words: intrusions, instability of fronts, interleaving models.

Изучение интрузий и внутритермоклинных вихрей в зонах океанских фронтов необходимо для анализа вентиляции термоклина, обмена и перемешивания различных водных масс и климатической изменчивости в различных районах океана [1—7]. Интрузионное расслоение, как правило, обусловлено неустойчивостью фронтов. Одним из основных механизмов, вызывающих неустойчивость бароклинных фронтов и чисто термохалинных фронтов (характеризуются отсутствием горизонтальных градиентов плотности; см., например, [8]), является двойная диффузия [9—16]. Однако в Евразийском бассейне Арктики в зоне слабого бароклинного фронта [6, 13, 17] наблюдаются интрузионные слои с вертикальными масштабами порядка 100—140 м и горизонтальными масштабами, достигающими сотен километров (рис. 1). Существование интрузионных слоев с такими большими масштабами дает определенные основания для предположения, что кроме двойной диффузии в процессах образования таких слоев могут играть роль и другие механизмы. Важно упомянуть также, что крупномасштабные интрузии Арктического бассейна наблюдаются в пикноклине, который характеризуется сменой типа термохалинной стратификации [6], так что один из интрузионных слоев лежит в области, характеризующейся абсолютно устойчивой термохалинной стратификацией (средняя соленость увеличивается, а средняя температура спадает с глубиной), т. е. является не типичной для возникновения двойной диффузии. Такая особенность термохалинной стратификации отсутствует, например, в зоне интенсивного крупномасштабного интрузионного расслоения с вертикальными масштабами до 50—70 м, наблюдающегося на чисто термохалинных фронтах северо-западной части Тропической Атлантики [1], где средняя стратификация типична для возникновения двойной диффузии (температура и соленость спадают с глубиной во всей области расслоения). Именно поэтому интрузионные слои в северо-западной части Тропической Атлантики океана удовлетворительно описываются классическими моделями интерливинга (interleaving models). Следует подчеркнуть и тот факт, что двумерные модели неустойчивости бароклинного фронта с учетом двойной диффузии позволяют получить неустойчивые моды с вертикальным масштабом до 10 м при типичных для океана параметрах задачи [6, 7, 8, 18, 19]. Поэтому, несмотря на то, что существуют подтвержденные моделированием гипотезы о слиянии интрузий небольшого вертикального масштаба в более крупные структуры [20], новые подходы к математическому описанию образования крупномасштабных интрузий в зонах слабых бароклинных фронтов представляются актуальными.

Настоящая работа посвящена поиску устойчивых (затухающих по времени) и неустойчивых (растущих по времени) аналитических решений уравнения потенциального вихря в длинноволновом

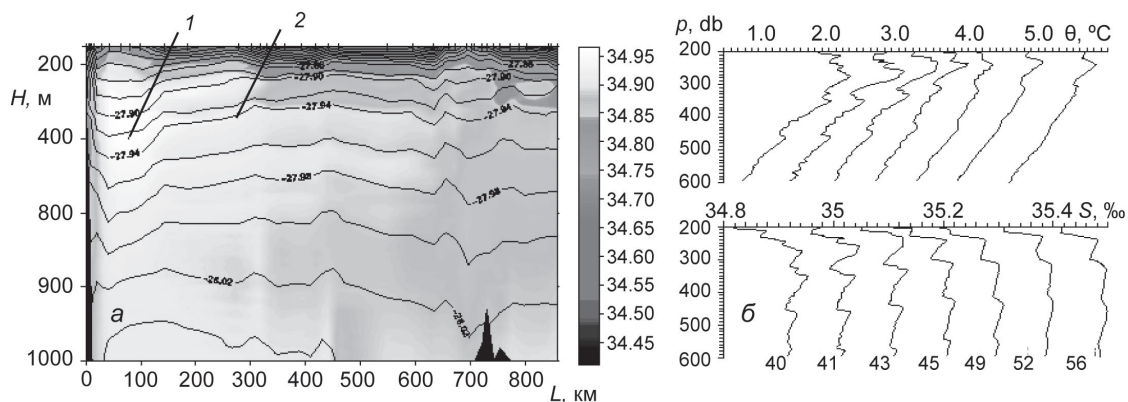


Рис. 1. Результаты эмпирического анализа CTD-данных, полученных в экспедиции ледокола «Polarstern» в 1996 г. [6].

a — разрез через Евразийский бассейн. На верхней оси абсцисс дано расположение станций. Координаты станции 30: 81°59' с.ш., 90°49' в.д.; координаты станции 72: 85°48' с.ш., 161°37' в.д. Шкала — соленость, изолинии — плотность; Атлантические водные массы (1) и область расслоения (2); *б* — типичные вертикальные профили потенциальной температуры и солености в области расслоения.

приближении, описывающего возмущения слабого геострофического течения, с учетом вертикальной диффузии плавучести. Полученные результаты дают возможность для выдвижения новых гипотез о причинах образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне в условиях абсолютно устойчивой стратификации.

Постановка задачи, вывод основного уравнения, поиск решений. Рассмотрим задачу о трехмерной неустойчивости бароклинного фронта на основе уравнений движения в квазигеострофическом приближении:

$$U = -\frac{1}{f} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -g\bar{\rho}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \quad u = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{f} \Delta p \right) + \beta v - f \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\tilde{K}}{f} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta p, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho + v \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} - \frac{N^2}{g} w = K \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rho, \quad (4)$$

где U, V — зональная и меридиональная компоненты скорости геострофического течения; $P, \bar{\rho}$ — давление и средняя плотность, нормированные на отсчетную плотность; N, f, g — частота Вайсяля—Брента, параметр Кориолиса и ускорение свободного падения; u, v, w — компоненты отклонений скорости от основного потока вдоль координат x, y, z соответственно; p, ρ — нормированные на отсчетную плотность отклонения давления и плотности от среднего состояния; β — параметр, характеризующий изменение параметра Кориолиса с широтой; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — вверх. В уравнениях завихренности (3) и адвекции (4) учтены трение и вертикальная диффузия с постоянными коэффициентами \tilde{K} и K , которые следует рассматривать как средние, эффективные коэффициенты обмена в некотором выделенном слое океана.

Пусть распределение средней плотности, нормированное на отсчетную плотность, имеет следующий вид:

$$\bar{\rho}(z, y) = fsyz / g + \tilde{f}\tilde{s}y / g - \frac{N_0^2}{g} z + 1, \quad (5)$$

где N_0 — константа, определяющая вертикальную стратификацию в зоне фронта (характерная частота Вайсяля—Брента); s и \tilde{s} — размерные константы ($[s] = \text{м}^{-1}\text{с}^{-1}$, $[\tilde{s}] = \text{с}^{-1}$), характеризующие сдвиг по вертикали геострофической скорости основного потока, которые могут быть больше и меньше нуля. Отметим, что часто в качестве отсчетной плотности выбирается плотность на горизонте $z = 0$, однако естественно, что отсчетную плотность можно привязывать к любому выбранному горизонту.

Первое слагаемое в правой части (5) не учитывалось в моделях образования интрузионного расщепления, описывающих двумерную неустойчивость бароклинного фронта [7, 18, 21], а также в моделях трехмерной неустойчивости бароклиных фронтов [3, 22]. Однако в зонах океанских фронтов может наблюдаться изменение не только средней плотности, но и частоты Вайсяля—Брента в направлении, поперечном фронту. Именно такую структурную особенность фронтальной зоны и отражает распределение (5): частота Вайсяля—Брента $N^2 = -gd\bar{\rho}/dz$ является функцией координаты y . Будем считать, что эта зависимость слабая в области от $y = 0$ до $y = L$ (L — характерный масштаб фронтальной зоны), то есть выполняется неравенство: $|s|fL \ll N_0^2$. Однако даже слабое изменение частоты Вайсяля—Брента свидетельствует о существовании квадратичной по вертикальной координате z компоненты геострофического течения. Действительно, при задании средней плотности (5) скорость геострофического течения принимает вид:

$$U = U_1 + U_2 + U_3, \\ U_1 = sz^2/f; \quad U_2 = \tilde{s}z; \quad U_3 = \text{const}, \quad (6)$$

где U_1, U_2 — составляющие скорости геострофического течения с линейным и постоянным по z сдвигами скорости: $dU_1/dz = sz$, соответственно; U_3 — постоянная (баротропная) добавка скорости.

Уравнение эволюции потенциального вихря, выведенное на основе системы (1)—(4) будет иметь вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{N_0^2 \Delta p}{f^2}\right) + \frac{\beta v N_0^2}{f} - v s f = K \frac{\partial^4}{\partial z^4} p + \tilde{K} \frac{N_0^2}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta p. \quad (7)$$

При выводе (7) было учтено, что $|f s y / N_0^2| \ll 1$ вследствие ограничения, введенного выше. Отметим также, что при дифференцировании по z уравнения (4), такие члены, как $(\partial U / \partial z) \cdot (\partial \rho / \partial x)$ и $(\partial v / \partial z) \cdot (\partial \bar{\rho} / \partial y)$ сокращаются, так как они равны по величине и противоположны по знаку в соответствии с уравнениями (1), (2).

Как видно из уравнения (7), последний член в левой части этого уравнения может усиливать или ослаблять в зависимости от знака s влияние β -эффекта на динамику возмущений.

Нас будет интересовать при $K \approx \tilde{K}$ динамика длинноволновых возмущений (возмущений планетарного масштаба) слабого геострофического течения ($K / H^2 \sim U / \tilde{L}$), для которых соблюдается следующее соотношение между вертикальным H и горизонтальным \tilde{L} масштабами: $\tilde{L} = L \gg L_R = NH / f$, где L_R — бароклинный радиус деформации Россби (приближение широкого фронта: см., например, [8]). Если применять уравнения (1)—(4) для описания движения в Арктическом бассейне, то влиянием β -эффекта можно пренебречь [6]. С учетом данных положений при поиске решений уравнения (7) методом разложения в ряд по малому параметру $\delta^2 = N_0^2 H^2 / (L^2 f^2)$ разумно ограничиться только первым членом ряда, и, следовательно, уравнение потенциального вихря значительно упростится:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) - v s f = K \frac{\partial^4}{\partial z^4} p. \quad (8)$$

В этом случае уравнение (4) необходимо переписать в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \rho + v \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} - \frac{N_0^2}{g} w_0 = K \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rho, \quad (9)$$

где $w_0 = \text{const}$.

Таким образом, уравнение завихренности (3), которое после пренебрежения β -эффектом примет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{f} \Delta p\right) - f \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

выпадает из рассмотрения.

Естественно, что уравнение потенциального вихря (8), которое соответствует уравнению адвекции (9) (в этом легко убедиться, если продифференцировать уравнение (9) по z), можно применять только для описания узкого класса явлений в океане, например для описания образования интрузий в области слабых бароклиных фронтов, горизонтальный масштаб которых значительно превышает масштаб Россби. Приведем здесь некоторые оценки, позволяющие подтвердить предположение, что вертикальные циркуляции, обусловленные изменением со временем завихренности, в случае описания интрузий на слабых бароклиных фронтах существенно не влияют на динамику возмущений. Учитывая, что оценка наиболее вероятного, эффективного коэффициента диффузии массы в термоклине Арктического бассейна должна удовлетворять неравенству $K \leq 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ [23], а вертикальный масштаб интрузий, к которым будет применяться данная теория, приблизительно равен $H \sim 100 \text{ м}$, то горизонтальные сдвиг геострофического течения не превышает следующего значения: $U/L \sim K/H^2 < 10^{-8} \text{ с}^{-1}$. Оценим теперь характерный масштаб вертикальной скорости, который может возникать из-за изменения завихренности, опираясь на уравнение (10). Из этого уравнения вытекает следующее соотношение для вертикальной скорости: $w_1 \sim UuH/(L^2 f)$. Учитывая, что малое возмущение u должно быть значительно меньше скорости геострофического потока, то получим $w_1 \ll 10^{-10} \text{ м с}^{-1}$. За время образования интрузии, которое разумно оценить из соотношения: $T \sim 1/(K/H^2) \sim 10^8 \text{ с}$ (оценки на основе модели представлены ниже), жидкая частица с такой вертикальной скоростью пройдет расстояние менее сантиметра, в то время как за счет вертикальной диффузии жидкая частица переместится на десятки метров.

Опираясь на сказанное выше, можно сделать вывод, что медленные крупномасштабные возмущения слабого геострофического потока в полярных районах океана допустимо описывать простой квазистационарной (геострофической) системой уравнений (2) и (9). Здесь целесообразно отметить, что при исследовании неустойчивости чисто термохалинного фронта с учетом двойной диффузии, но при

$\bar{\rho}_y = 0, U = 0$, Стерн [14] в своей пионерской работе по описанию интрузионного расслоения в океане опирался на аналогичную систему уравнений.

Уравнение (9) перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} z s + N_0^2 w_0 = K \frac{\partial^3}{\partial z^3} p. \quad (11)$$

С учетом того, что мы будем исследовать в дальнейшем неустойчивость в ограниченном по вертикальной координате слое, необходимо потребовать равенство нулю вертикальной скорости на границах слоя (см., например, известную задачу Иди [22]), то есть мы должны положить в уравнении (11) $w_0 = 0$, и, следовательно, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} z s = K \frac{\partial^3}{\partial z^3} p. \quad (12)$$

Будем искать решения уравнения (12) в виде

$$p = \text{Re} \left\{ F(z) e^{ik(x-ct)} \sin(\pi y / L) \right\}. \quad (13)$$

В равенстве (13) используются следующие обозначения: k — волновое число (ось x); c — скорость роста. Скорости возмущений u, v будут выражаться следующими равенствами $u = (-\pi/Lf)p, v = (ik/f)p$. Решение будет неустойчиво, т. е. расти со временем, если мнимая часть c будет положительной, т. е. $\text{Im } c > 0$.

После подстановки (13) в (12) получим следующее уравнение, положив $U = U_1 + U_3$ (6):

$$ik(U_1 + U_3 - c) \left(\frac{dF(z)}{dz}\right) - F(z) i k s z = K \frac{d^3}{dz^3} F(z). \quad (14)$$

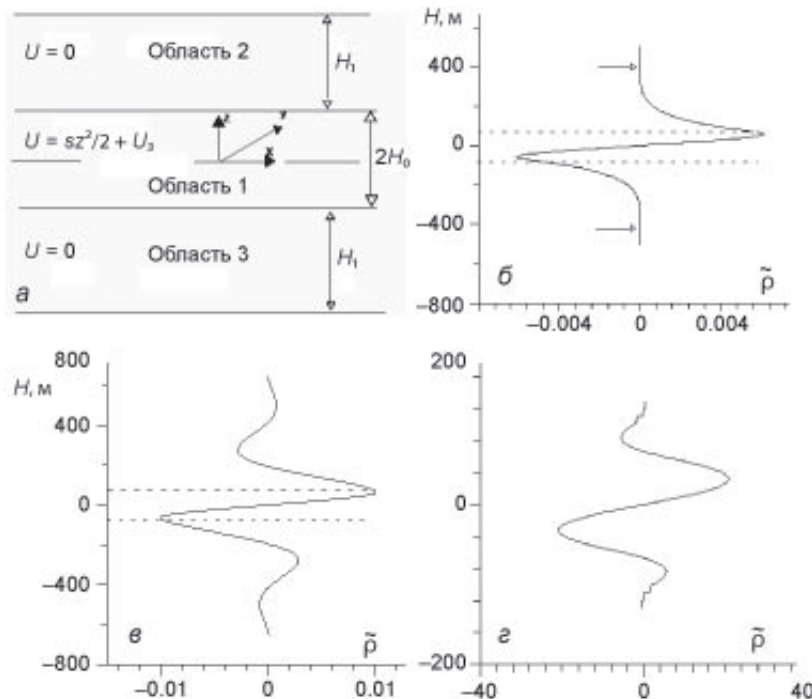


Рис. 2. Результаты расчетов полученных решений.

a — схема геометрии задачи: область 1 с вертикальным масштабом $2H_0$, в которой существует геострофический поток с квадратичной по z компонентой скорости $U = U_1 = sz^2/2$ ($H_0 \geq z \geq -H_0$), и области 2 и 3 с вертикальными масштабами H_1 , в которых z изменяется в пределах $H_0 < z \leq -H_0$ и $-H_0 > z \geq -H_0 - H_1$, соответственно, и скорость среднего потока равна нулю: $U = 0$; b — неустойчивое решение $\text{Re } \varphi(z) = \bar{\rho}$, соответствующее возмущению плотности, полученное при $H_0 = 70$ м,

$H_0 + H_1 = 400$ м, $s = 10^{-7} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$, $K = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $K' = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $b_1 H_0 = 2$, $\chi \approx 2$ (для расчетов использовались гидрологические параметры, типичные для Арктического бассейна); стрелками помечены зоны, где возмущение плотности слабо падает с глубиной; v — то же, что в предыдущем случае, но при $K' = -10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$; g — устойчивое решение построено при $K = 0.3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $k = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, $s = 10^{-7} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$ (для удобства представления масштаб по вертикальной оси рис. 2, g увеличен в 4 раза по сравнению с рис. 2, a, b).

Нас будет интересовать поиск ответа на вопрос: можно ли высказать определенные суждения о возможности возникновения неустойчивых длинноволновых возмущений слабого геострофического потока с учетом вертикальной диффузии плавучести, опираясь на найденные аналитические решения уравнения (14)?

Легко убедиться, что точным решением уравнения (14) является функция:

$$F(z) = Ae^{-az^2/2} + Bz^2 + D, \quad (15)$$

где $ikc = ik(c_1 + ic_2) = 5aK + ikU_3$, $a^2 = iks/2K$, $c_1 = \text{Re}c$, $c_2 = \text{Im}c$; A и B — произвольные константы; $D = -2B(c - U_3)/s$ и $U_1 + U_3 - \text{Re}c \neq 0$ для любой точки $z = z_0$, лежащей во внутренней области слоя.

Рассмотрим теперь неустойчивые и устойчивые решения вида (15).

Решение может быть **неустойчиво** при $s > 0$ и $s < 0$. Действительная и мнимая части kc для растущих со временем решений будут иметь вид:

$$kc_1 = 2.5 \cdot \sqrt{|s|kK} + kU_3, \quad kc_2 = 2.5 \cdot \sqrt{|s|kK}, \quad s < 0, \quad (16)$$

$$kc_1 = -2.5\sqrt{skK} + kU_3, \quad kc_2 = 2.5 \cdot \sqrt{skK}, \quad s > 0. \quad (17)$$

Согласно (16) и (17) скорость роста увеличивается с увеличением линейного сдвига s и коэффициента вертикальной диффузии K .

Неустойчивое решение реализуется при $\text{Re}a < 0$, и, следовательно, для любого конечного волнового числа k функция $F(z)$ и все ее производные резко возрастают при $z \rightarrow \pm\infty$. В связи с этим, неустойчивые решения должны рассматриваться только в ограниченном по вертикали слое. Более того, для доказательства неустойчивости, необходимо показать, что $F(z)$ при $\text{Re}a < 0$ является собственной функцией краевой задачи с граничными условиями, которые будут рассмотрены ниже.

Для построения решений, моделирующих структуру возмущений на вертикальных STD-профилях в области интрузионного расслоения (рис. 1), рассмотрим слой, состоящий из трех областей (рис. 2, а): области 1 с вертикальным масштабом $2H_0$, в которой существует геострофический поток с квадратичной по z компонентой скорости $U = U_1 + U_3 = sz^2/2 + U_3$ ($H_0 \geq z \geq -H_0$, $s > 0$), и областей 2 и 3 с вертикальными масштабами H_1 , в которых z изменяется в пределах $H_0 < z \leq H_0 + H_1$ и $-H_0 > z \geq -H_0 - H_1$, соответственно, и скорость среднего потока мала, так что ею можно пренебречь, положив: $U = 0$. Начало координат расположим на средней линии области 1. Ограничимся здесь анализом случая, когда разрыв скорости геострофического потока на границах области 1 отсутствует. Поэтому положим, что выполняется равенство: $U_3 = -sH_0^2/2$.

Решения в областях 1, 2, 3 обозначим как $F_1(z)$, $F_2(z)$ и $F_3(z)$, соответственно.

Будем строить решение, для которого приближенно выполняются условия скольжения ($\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$) и условия отсутствия потоков плавучести ($\rho_z = 0$) на границах слоя. Эти условия запишутся в виде: $F_2'(z) \approx 0$, $F_2''(z) \approx 0$, $z = H_1 + H_0$ и $F_3'(z) \approx 0$, $F_3''(z) \approx 0$, $z = -H_1 - H_0$.

В соответствии с такими граничными условиями, функция $F(z)$, состоящая из $F_1(z)$, $F_2(z)$ и $F_3(z)$, не возрастает при $|z| \rightarrow H_1 + H_0$, а все ее производные являются затухающими функциями при стремлении $|z| \rightarrow H_1 + H_0$. Таким образом, на границах слоя, значительно удаленных от начала координат, возмущения потоков плавучести и плотности будут бесконечно малы, а возмущения давления и скорости равняться конечным величинам.

Решение в области 1 должно удовлетворять уравнению (14) и выражаться формулой (15), в то время как решения в областях 2 и 3 должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$-ikc \frac{dF_2}{dz} = K' \frac{d^3 F_2}{dz^3}, \quad -ikc \frac{dF_3}{dz} = K' \frac{d^3 F_3}{dz^3}, \quad (18)$$

где K' — коэффициент вертикальной диффузии в областях 2 и 3, причем $K \neq K'$.

Решения уравнений (18) в областях 2 и 3 в соответствии с граничными условиями должны иметь следующий вид:

$$F_2 = Ge^{-b_1 z - ib_2 z} + C_1, \quad F_3 = \tilde{G}e^{b_1 z + ib_2 z} + \tilde{C}_1, \quad (19)$$

где b_1 , b_2 — вещественные константы, причем $b_1 > 0$, чтобы удовлетворялись граничные условия; G , \tilde{G} , C_1 , \tilde{C}_1 — константы, которые могут быть комплексными числами.

Подставляя (19) в (18), найдем следующие соотношения для определения констант b_1 и b_2 :

$$kc_2 = r = K'(b_1^2 - b_2^2); kU_3 - kc_1 = r = 2K'b_1b_2, \quad (20)$$

где $r = 2.5(skK)^{1/2}$, $s > 0$.

Из (20) легко получить выражения для b_1 и b_2 , которые могут быть, как положительными, так и отрицательными.

Учитывая, что мы рассматриваем уравнения третьего порядка, на границах области 1 функция $F(z)$, состоящая из функций $F_1(z)$, $F_2(z)$ и $F_3(z)$ должна быть непрерывной вплоть до второй производной включительно, то есть на границах области 1 должны быть непрерывными давление, и, следовательно, горизонтальные компоненты скорости, плотность и поток плотности (поток плавучести). Очевидно, что условия непротекания на границах слоя выполняются, так как в областях 2 и 3 вертикальная скорость равна нулю в соответствии с решениями (19). В области 1 вертикальная скорость равна нулю с точностью до бесконечно малой добавки w_1 (см. выше), которой в рамках квазистационарной модели можно пренебречь.

Условия на верхней границе области 1 должны иметь вид:

$$\begin{aligned} Ge^{-b_1H_0 - ib_2H_0} + C_1 &= Ae^{-aH_0^2/2} + BH_0^2 + D, \\ G(-b_1 - ib_2)e^{-b_1H_0 - ib_2H_0} &= A(-aH_0)e^{-aH_0^2/2} + 2BH_0, \\ G(-b_1 - ib_2)^2 e^{-b_1H_0 - ib_2H_0} &= A(-a + a^2H_0^2)e^{-aH_0^2/2} + 2B. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично составляются уравнения для нижней границы области 1. Вследствие того, что геострофическое течение симметрично относительно средней линии слоя и решение (15) является четной функцией, система уравнений (21) будет полностью аналогична системе уравнений, составленных для нижней границы области 1. Таким образом, количество независимых констант позволяет построить непрерывную на границах области 1 функцию $F(z)$, у которой первая и вторая производные также будут непрерывны на границах этой области.

Учитывая, что константы в (21) могут принимать различные значения, в слое может возникать неустойчивость, так как в широком диапазоне типичных для океана значениях H_0 , s , U_3 , K , K' всегда найдется волновое число $k_0 \ll f/(N_0H_0)$, при котором (21) выполняется, и, следовательно, функция $F(z, k = k_0)$, удовлетворяющая всем требуемым граничным условиям, будет определена во всей области изменения z .

Графические изображения неустойчивых решений представлены на рис. 2, б, в. Для построения решения использовались типичные значения гидрологических параметров применительно к Арктическому бассейну (см. ниже). Расчеты проводились при $K' > 0$ и $K' < 0$. С точки зрения автора, отрицательный коэффициент K' является простейшей параметризацией результата действия двойной диффузии в рамках настоящей простой модели: легкое возмущение, теряя массу, становится легче, а тяжелое возмущение, приобретая массу, становится тяжелее. Как видно из приведенных расчетов, графики имеют существенные различия, которые будут обсуждаться ниже.

Для анализа **устойчивых** решений, рассмотрим слой, состоящий только из области 1 (рис. 2).

Устойчивые решения уравнения (14) реализуется при $\text{Re}a > 0$, т. е. резко стремятся к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$, если положить $B = 0$ в (15), и, следовательно, условия скольжения и условия отсутствия потоков плавучести на границах слоя большого вертикального масштаба с очевидностью выполняются (строго говоря, устойчивые решения могут рассматриваться в безграничном по вертикали слое). Решения описывают затухающие по времени длинные волны, которые могут двигаться в отличие от волн Россби не только на запад, но и на восток в зависимости от знака s (7). Более того, если величина s превышает величину параметра β (что в некоторых ситуациях вполне допустимо) описание динамики длинных волн в приближении β -плоскости должно определяться линейным сдвигом геострофического течения.

Вещественная и мнимая части скорости роста устойчивых возмущений выражаются следующими соотношениями:

$$kc_1 = -2.5 \cdot \sqrt{|s|kK} + kU_3, \quad kc_2 = -2.5 \cdot \sqrt{|s|kK}, \quad s < 0; \quad (22)$$

$$kc_1 = 2.5\sqrt{skK} + kU_3, \quad kc_2 = -2.5 \cdot \sqrt{skK}, \quad s > 0. \quad (23)$$

Сравнивая (16), (17) с (22) и (23), можно сделать вывод, что фазовые скорости устойчивых и неустойчивых возмущений могут отличаться по знаку, т. е. при некоторых значениях баротропной скорости U_3 устойчивое и неустойчивое возмущения с одним и тем же волновым вектором k будут двигаться в разных направлениях относительно потока.

График устойчивого решения представлен на рис. 2, *г*.

Выдвинем теперь гипотезу, что полученные выше, частные решения могут быть полезны для приложений: устойчивые решения — для описания длинных «диффузионных» волн в геострофическом потоке с линейным сдвигом скорости, а неустойчивые решения — для описания крупномасштабных интрузий, наблюдающихся в океане.

Примеры использования частных неустойчивых решений для анализа расслоения на океанских фронтах, можно найти в [8, 14, 21]. Так, в известной работе Стерна [14], в которой впервые изучалась неустойчивость безграничного фронта вследствие работы двойной диффузии, не определялась максимально растущая мода. В настоящей модели скорость роста возрастает с увеличением волнового числа k вплоть до некоторого предельного \tilde{k} , для которого все еще верно ограничение $\tilde{k} \ll f / (2H_0 N_0)$. Это обусловлено тем, что в модели пренебрегается горизонтальной диффузией плавучести. Таким образом, на основе данной модели нельзя точно определить волновое число наиболее неустойчивой моды и оценить ее скорость роста. Однако представляется весьма полезным высказать некоторые соображения, которые дадут основу для грубой оценки волнового числа наиболее неустойчивой моды, и, следовательно, для оценки ее скорости роста.

Для этого рассмотрим условия сшивки решений (21). Здесь важно обратить внимание на следующее. Три уравнения для определения констант могут иметь нетривиальные решения в широком спектре заданных значений H_0 , s , K , K' только в том случае, если существуют определенные ограничения на параметр $\chi = \text{Re}(-aH_0^2) = 0.5(ks/K)^{1/2} H_0^2$. Действительно, экспоненты в правой части (21) для любого конкретного волнового числа $k \ll f/(2H_0 N_0)$ могут резко возрастать с увеличением масштаба H_0 , а экспоненты в левой части (22), наоборот, резко уменьшаться с увеличением H_0 , и, следовательно, уравнения (21) относительно констант могут не иметь нетривиальных решений. В связи с этим, необходимо потребовать выполнение определенных ограничений на параметр χ сверху и снизу. Более того, необходимость ограничений сверху и снизу на параметр χ следует из вывода уравнения потенциально-го вихря (8) на основе квазигеострофических уравнений (1)–(4). Действительно, при выводе (8) мы опирались на условие $U/L \sim K/H^2$ (слабое геострофическое течение), которое по сути дела означает, что параметр χ должен иметь узкий диапазон изменчивости.

Таким образом, чем больше этот параметр, тем больше волновое число неустойчивой моды, и, следовательно, тем больше скорость роста. Однако применимость нашей модели требует ограничение на пространство волновых чисел $k \ll f/(2H_0 N_0)$ и выполнение приближенного условия $U/L \sim K/H^2$. Для того чтобы удовлетворить одновременно этим условиям, разумно ограничить изменчивость параметра χ в следующих пределах: $1 \leq \chi \leq 2$.

Учитывая, что b_1 и χ зависят от разных гидрологических параметров, для корректной сшивки решений необходимо потребовать ограничение и на параметр $b_1 H_0$:

$$b_1 H_0 = p, \quad (24)$$

где p — константа, которая не должна значительно превышать единицу.

Обратим теперь внимание на следующее. Если продифференцировать по z уравнение (14), то нельзя не отметить аналогии между полученным уравнением и уравнением Орра—Зоммерфельда [24]. Однако между этими уравнениями существуют важные различия. В случае уравнения Орра—Зоммерфельда искомой функцией является функция тока в вертикальной плоскости, и дестабилизация потока обусловлена вертикальным трением, а не диффузией, как в нашем случае. Более того, неустойчивость, которая анализируется в рамках уравнения Орра—Зоммерфельда при очень малой вязкости, является неустойчивостью критического слоя (неустойчивость, которая возникает, когда фазовая скорость возмущения равняется скорости потока в некоторой точке, лежащей внутри области слоя [24]), что отличается от неустойчивости, рассмотренной в данной модели. Тем не менее, определенная аналогия между этими двумя уравнениями помогает ввести полезный безразмерный параметр дополнительно к параметру χ . Действительно, учтем, что в нашей модели $U = U_1 + U_3$, где $U_3 = -sH_0^2/2$ ($s > 0$), тогда среднюю скорость течения в слое можно оценить на основе формулы $\bar{U} = |sH_0^2/4|$. Отсюда легко получить следующее

соотношение: $\chi^2 = 0.25(k_s / K_2)H_0^4 = R_d k H_0$. Параметр $R_d = 0.25sH_0^3 / K = \bar{U}H_0 / K$ является диффузионным аналогом числа Рейнольдса (о числе Рейнольдса в различных задачах гидродинамики и океанологии см., например, [24, 25]).

В заключение отметим следующее.

Одним из недостатков данной простой модели является тот факт, что мы не учли горизонтальную диффузию, которая может стабилизировать геострофический поток. Важным является и определение вида неустойчивости, которая описывается решениями (15). Наиболее вероятно, что неустойчивые моды можно отнести к бароклинной неустойчивости длинноволновых возмущений слабого геострофического течения. Однако сделать точный вывод можно только на основе дополнительного анализа.

Изучение неустойчивости слабого геострофического течения с учетом постоянного сдвига геострофической скорости в рамках квазистационарной (геострофической) системы (2), (9) также может явиться предметом для дальнейших исследований. Однако наиболее интересной задачей, с точки зрения автора, является анализ неустойчивости слабого геострофического течения ($K / H^2 \sim U / \tilde{L}$) большого поперечного масштаба (значительно превышающего локальный радиус Россби) в рамках уравнения потенциального вихря (7). В этом случае анализ неустойчивости сводится к задаче на собственные значения, которая должна решаться численными методами. Полученные в настоящей работе, аналитические решения (15) полезны для проверки численных решений задачи. С другой стороны, решение более общей задачи даст возможность точнее оценить область применимости рассмотренной простой модели.

Применение полученных решений к интрузиям в Евразийском бассейне. Согласно [6] в термоклине Евразийского бассейна верны следующие оценки f и N : $f = 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ и $N = 2 \div 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Поэтому для движений с вертикальными масштабами $h \approx 100$ м радиус Россби L_R составляет $2 \div 4$ км, и, следовательно, $1/k = \tilde{L} \approx 20 \div 40$ км можно рассматривать, как минимальный масштаб возмущений вдоль фронта, которые могут корректно описываться настоящей моделью.

Уравнение (7) выводилось на основе предположения, что величина линейного сдвига s ограничена неравенством $|s|/L \ll N_0^2$. Учитывая, что горизонтальный масштаб фронта равен приблизительно $L = 100 \div 200$ км (масштаб вдоль оси y), максимальное значение величины линейного сдвига должно удовлетворять неравенству: $|s| \leq 1 \div 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$. Для коэффициента вертикальной диффузии целесообразно принять диапазон изменчивости от $K = 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ до $K = 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. Величина $K = 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ удовлетворительно соответствует наиболее вероятному значению коэффициента вертикальной диффузии, которое получено для термоклина Арктики [23].

Предположим, что вертикальный масштаб области, в которой линейный сдвиг геострофической скорости имеет существенное значение, равен 140 м, то есть величина H_0 равна 70 м. Используя следующую формулу:

$$k = 4\chi^2 \cdot K / (H_0^4 s), \quad (25)$$

оценим волновое число k_0 , полагая $\chi = 2$.

Подставляя в (25) значение линейного сдвига $s = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$ и типичный для термоклина Арктики коэффициент вертикального обмена $K = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, получим, что $1/k_0 = \tilde{L} = 50$ км. Из выражения для скорости роста (17) и равенства (25) следует, что скорость роста $k_0 c_2$ выражается следующей формулой: $k_0 c_2 = 5\chi \cdot K / H_0^2 = 1/T \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, время образования интрузии с характерным зональным масштабом 50 км равняется приблизительно году. Проверим теперь, насколько полученная оценка корректна. Для этого еще раз оценим характерный масштаб вертикальной скорости, возникающей из-за изменения со временем завихренности, которой мы пренебрегли в рамках модели. На основе уравнения (10) легко получить, что $w_1 \sim uH_0 / (\tilde{L}fT) \ll \bar{U}H_0 / (\tilde{L}fT) = K / (H_0 fT) \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ м} \text{ с}^{-1}$, то есть вертикальная скорость пренебрежимо мала, и, следовательно, при оценивании времени образования интрузий с помощью формул (17) и (25), мы не вышли за рамки применимости модели.

Важно отметить, что относительно большие времена образования интрузий согласно оценкам на основе классических моделей интерливинга с учетом двойной диффузии или дифференциального перемешивания в промежуточных и глубинных слоях Арктического термоклина являются типичными [26—28]. Однако оценка, полученная в настоящей работе, на основе совершенно иных соображений, относится к образованию крупномасштабных интрузий, вертикальные масштабы которых превышают масштабы интрузионного расслоения, изучавшегося в перечисленных работах [26—28].

Обсудим теперь решения, полученные выше. Согласно анализу эмпирических данных, область, в которой наблюдается изменение частоты Вэйсяля—Брента с широтой, находится в диапазоне глубин 200—400 м (рис. 1). Ее горизонтальный масштаб составляет приблизительно 200 км (100—300 км, рис. 1). Именно в этой области наблюдается термохалинная стратификация, не типичная для возникновения двойной диффузии (средняя температуры спадает, а средняя соленость увеличивается с глубиной). Сопоставим эту область с областью 1, а зоны выше и ниже этой области сопоставим с областями 2 и 3 (рис. 2, а).

При расчете решения $\text{Re}\rho(z) = \tilde{\rho}$ (рис. 2, б) с учетом ограничений (24) и $1 \leq \chi \leq 2$ полагалось, что $H_0 = 70$ м, $H_0 + H_1 = 400$ м, $s = 10^{-7} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$, $K = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $K' = 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $b_1 H_0 = 2$, $\chi \approx 2$. Безразмерное волновое число $k_0 H_0$, соответствующее, выбранным для расчетов параметрам, лежало в области применимости модели $k_0 H_0 \ll f/(2N_0)$ для Арктического района. Значение $\tilde{\rho}$ на границах слоя было бесконечно мало: отношение $\tilde{\rho}(z = \pm(H_0 + H_1)) / \tilde{\rho}_{\text{max}} \approx 10^{-5}$, где $\tilde{\rho}_{\text{max}}$ — максимальное значение $\tilde{\rho}$ в расчетной области. Если сравнить данное решение со структурой возмущений на профилях температуры и солености, то можно отметить, что полученное решение моделирует возмущение только в области 1. Неустойчивые возмущения в областях 2 и 3 резко затухают при $z \rightarrow \pm(H_0 + H_1)$, демонстрируя лишь слабо выраженные зоны спадания возмущения плотности с глубиной (помечены на графиках стрелками). Иная картина наблюдается для неустойчивого решения, представленного на рис. 2, в. Данное решение рассчитывалось при тех же параметрах, что и предыдущее, но при $K' = -10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. Отрицательный коэффициент K' , как уже говорилось выше, является простейшей параметризацией двойной диффузии. Выбор отрицательного коэффициента в областях 2 и 3 мотивировался тем, что выше и ниже области 1 наблюдается стратификация, типичная для работы двойной диффузии. Именно поэтому решение, представленное на рис. 2, в, демонстрирует явно выраженные зоны уменьшения возмущения плотности с глубиной в областях 2 и 3. Не исключено, поэтому, что учет двойной диффузии в этих областях на основе общепринятой параметризации позволит построить аналитическое решение, которое будет иметь лучшее сходство со сложной структурой интрузий, наблюдающейся в реальности.

В данной работе найдены некоторые аналитические решения задачи о трехмерной неустойчивости слабого геострофического течения с линейным сдвигом скорости с учетом вертикальной диффузии плавучести. Анализ основан на уравнении эволюции потенциального вихря в длинноволновом приближении: горизонтальный масштаб возмущений значительно превышает локальный радиус деформации Россби. Выдвигается гипотеза, что полученные решения могут быть полезны для описания устойчивых и неустойчивых возмущений планетарного масштаба в полярных районах океана, в частности, в Арктическом бассейне, где наблюдаются слабые бароклинные фронты с большими горизонтальными (поперечными фронту) масштабами, временная изменчивость которых может превышать несколько лет, и влияние бета-эффекта на динамику возмущений практически отсутствует. Именно из-за таких особенностей бароклиновых фронтов, в частности, в Евразийском бассейне Арктики изменение завихренности со временем практически не влияет на динамику крупномасштабных возмущений, поэтому в зонах таких фронтов следует ожидать образования интрузий, а не вихрей.

Неустойчивость, которая описывается полученными решениями, следует отличать от двумерной неустойчивости МакИнтайра [29] и двумерной бароклиновой неустойчивости [7, 18, 19, 21], обусловленной двойной диффузией.

Выведенное в настоящей работе уравнение потенциального вихря в длинноволновом приближении аналогично по форме уравнению Орра—Зоммерфельда [24], хотя имеет с последним существенные различия, одним из которых является следующее: дестабилизирующее геострофическое течение эффект обусловлен вертикальной диффузией плотности, а не вертикальным трением. Показано, что управляющим параметром неустойчивости является безразмерный параметр, который можно было бы назвать диффузионным аналогом числа Рейнольдса.

Неустойчивые (растущие со временем) решения применяются для описания образования крупномасштабных интрузий, которые наблюдаются в Арктическом бассейне в областях, характеризующихся абсолютно устойчивой стратификацией. Двойная диффузия, которая является типичным механизмом образования интрузий в океане, для построения решений учитывается с помощью простейшей параметризации в рамках модели, как дополнительный, важный механизм, позволяющий моделировать

на основе аналитических решений сложную структуру интрузионного расслоения. Проводится сравнение решений, полученных с учетом и без учета двойной диффузии, со структурными особенностями наблюдаемых в Евразийском бассейне крупномасштабных интрузий. Показано также, что устойчивые (затухающие со временем) решения описывают крупномасштабные возмущения, которые в отличие от волн Россби могут двигаться не только на запад, но и на восток, в зависимости от величины и знака линейного сдвига геострофической скорости.

Найденные аналитические решения могут быть полезны для проверки численных решений задач на собственные значения, посвященных анализу трехмерной неустойчивости бароклинных фронтов с учетом вертикальной диффузии плавучести. Более того, полученные решения дают аналитические выражения для собственных функций и инкрементов роста, которые в задачах на собственные значения, как правило, точно определить не удается.

Представленный анализ дает возможность для формирования новой точки зрения на процесс образования крупномасштабных интрузий в зонах слабых бароклинных фронтов в условиях абсолютно устойчивой стратификации. Тем не менее, предложенное описание следует рассматривать как гипотезу, для веского обоснования которой необходимы дополнительные усилия, направленные на теоретическое моделирование и анализ натурных данных.

Автор признательна В. М. Журбасу и М. А. Соколовскому за полезные замечания.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проект 15-05-01479-а) и РНФ (проект 14-50-00095).

Литература

1. Журбас В. М., Кузьмина Н. П., Кульша О. Б. Численное моделирование ступенчатого расслоения главного термоклина океана при вырождении термохалинных интрузий солевыми пальцами (численный эксперимент) // *Океанология*. 1987. Т. 27, № 3. С. 377—383.
2. Журбас В. М. и др. О проявлении процесса субдукции в термохалинных полях вертикальной тонкой структуры и горизонтальной мезоструктуры во фронтальной зоне Азорского течения // *Океанология*. 1993. Т. 33, № 3. С. 321—326.
3. Кузьмина Н. П. О вертикальной структуре трехмерного интрузионного расслоения океанских фронтов с существенной бароклинностью и термоклинностью // *Океанология*. 2001. Т. 41, № 3. С. 356—363.
4. Кузьмина Н. П., Рудель Б., Журбас В. О структуре интрузий и фронтов в глубинном слое Евразийского бассейна и бассейна Макарова (Арктика) // *Океанология*. 2013. Т. 53, № 4. С. 463—475.
5. Кузьмина Н. П. и др. О роли вихрей и интрузий в процессах обмена в Балтийском халоклине // *Океанология*. 2008. Т. 48, № 2. С. 165—175.
6. Kuzmina N., Rudels B., Zhurbas V., Stipa T. On the structure and dynamical features of intrusive layering in the Eurasian Basin in the Arctic Ocean // *J. Geophys. Res.* 2011. V. 116. C00D11. doi:10.1029/2010JC006920.
7. Kuzmina N. P., Zhurbas V. M. Effects of Double Diffusion and Turbulence on Interleaving at Baroclinic Oceanic Fronts // *J. Phys. Oceanogr.* 2000. V. 30, № 12. P. 3025—3038.
8. Kuzmina N., Rudels B., Stipa T., Zhurbas V. The Structure and Driving Mechanisms of the Baltic Intrusions // *Journal of Physical Oceanography*. 2005. V. 35, N. 6. P. 1120—1137.
9. Kuzmina N. P. On the parameterization of interleaving and turbulent mixing using CTD data from the Azores Frontal Zone // *J. Mar. Syst.* 2000. V. 23. P. 285—302.
10. Kuzmina N. P., Lee J. H., Zhurbas V. M. Effects of turbulent mixing and horizontal shear on double-diffusive interleaving in the Central and Western Equatorial Pacific // *J. Phys. Oceanogr.* 2004. 34. P. 122—141.
11. McDougall T. J. Double-diffusive interleaving. Part 1: Linear stability analysis // *J. Phys. Oceanogr.* 1985. V. 15. P. 1532—1541.
12. Niino H. A linear stability theory of double-diffusive horizontal intrusions in a temperature-salinity front // *J. Fluid. Mech.* 1986. V. 171. P. 71—100.
13. Rudels B., Bjork G., Muench R. D., Schauer U. Double-diffusive layering in the Eurasian Basin of the Arctic Ocean // *J. Mar. Syst.* 1999. V. 21, N. 1—4. P. 3—27.
14. Stern M. E. Lateral mixing of water masses // *Deep-Sea Res.* 1967. V. 14, N. 12A. P. 747—753.
15. Toole J. M., Georgi D. T. On the dynamics and effects of double-diffusively driven intrusions // *Prog. Oceanogr.* 1981. V. 10. N. 2. P. 123—145.
16. Yoshida J., Nagashima H., Niino H. The behavior of double-diffusive intrusion in a rotating system // *J. Geophys. Res.* 1989. V. 94. P. 4923—4937.
17. Rudels B. et al. Double-Diffusive Convection and Interleaving in the Arctic Ocean — Distribution and Importance // *Geophysika*. 2009. P. 199—213.
18. Кузьмина Н. П., Родионов В. Б. О влиянии бароклинности на образование термохалинных интрузий в океанских фронтальных зонах // *Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана*. 1992. Т. 28, № 10—11. С. 1077—1086.
19. Kuzmina N., Lee J. H. Driving Forces of Interleaving in the Baroclinic Front at the Equator // *Journal of Physical Oceanogr.* 2005. V. 35, N. 12. P. 2501—2519.
20. Radko T. Mechanics of merging events for a series of layers in a stratified turbulent fluid // *J. Fluid Mech.* 2007. P. 251—273.
21. May B. D., Kelley D. E. Effect of baroclinicity on double-diffusive interleaving // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. 27. P. 1997—2008.
22. Eady E. T. Long waves and cyclone waves // *Tellus*. 1949. V. 1, № 3. P. 33—52.

23. *Walsh D., Carmack E.* The nested structure of Arctic thermohaline intrusions // *Ocean Modelling*. 2003. V. 5. P. 267—289.
24. *Stern M.* Ocean circulation physics. International Geophysics Series. V. 19. Academic Press, 1975. 245 p.
25. *Баренблатт Г. И.* Автономные явления — анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом Интеллект, 2009. 216 с.
26. *Кузьмина Н. П.* и др. Применение моделей интерливинга для описания интрузионного расслоения на фронтах глубинной полярной воды Евразийского бассейна (Арктика) // *Океанология*. 2014. Т. 54. С. 594—604.
27. *May B. D., Kelley D. E.* Growth and steady stage of thermohaline intrusions in the Arctic Ocean // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106. P. 16783—16794.
28. *Merryfield W. J.* Intrusions in Double-Diffusively Stable Arctic Waters: Evidence for Differential mixing? // *J. Phys. Oceanogr.* 2002. V. 32, N. 5. P. 1452—1439.
29. *McIntyre M. E.* Diffusive destabilization of the baroclinic circular vortex // *Geophys. Fluid Dyn.* 1970. V. 1, N. 1—2. P. 19—57.

Статья поступила в редакцию 04.07.2015 г.