

УДК 532.5, 534.222.2

© И. А. Огородников, В. Ю. Бородулин

Институт теплофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск
igoro47@yandex.ru, v_u_b@mail.ru

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН С ПУЗЫРЬКОВЫМИ СЛОЯМИ

Выведена самосогласованная система уравнений движения гетерогенной среды без использования операций осреднения. Среда представлена жидкой или газообразной несущей фазой с произвольным распределением частиц, состоящих из отличных от несущей среды фаз по пространству и размерам. Одним из типичных примеров такой среды является приповерхностный слой в океане, содержащий пузырьки газа. Здесь в качестве частиц выступают отдельные пузырьки. Система уравнений включает уравнения сохранения массы, количества движения, момента количества движения, энергии и уравнения движения для каждой частицы. Частицы дискретной фазы выступают в качестве источников массы, импульса, момента импульса и энергии по отношению к несущей среде. Движение частиц обусловлено силами межфазного взаимодействия с несущей фазой и другими внутренними и внешними силами. В качестве приложения к задачам исследования гидрофизических полей выведена нелинейная волновая система уравнений для жидкости с пузырьками газа. Верификация волновой системы уравнений проведена сопоставлением численных решений с экспериментальными данными. Модель количественно описывает наблюдаемые в экспериментах эффекты, что позволяет говорить о применимости предложенного подхода для описания распространения волн в жидкости с пузырьками в очень широком диапазоне условий.

Ключевые слова: микроскопический подход, жидкость с пузырьками, нелинейная волновая модель, сравнение с экспериментом.

I. A. Ogorodnikov, V. Yu. Borodulin

Kutateladze Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia

MICROSCOPIC MODEL OF THE DYNAMICS OF A HETEROGENEOUS MEDIUM. INTERACTION OF ACOUSTIC WAVES WITH BUBBLE LAYERS

The model equations of motion of a heterogeneous medium are developed. The model does not use the process of determining the average properties of inhomogeneities. It is assumed that the medium are liquids or gases, which act as the carrier medium. Particles of another state of aggregation can be arbitrary distributed in the carrier medium. For example, it may be near-surface layer of the ocean. Here, the gas bubbles can be considered as particles of inhomogeneities in a homogeneous medium. The model includes the equation of conservation of mass, momentum, angular momentum and energy in relation to the carrier medium. The particles are sources of mass, momentum, angular momentum and energy in relation to the carrier medium. The movement of the particles occurs due to interfacial forces and other internal and external forces. As an application to the problems of the hydrophysics field research, it was derived non-linear system of equations for the wave propagation in liquid with gas bubbles. Verification of wave equations carried out by comparing the numerical solutions with experimental data. The model quantitatively describes the effects observed in the experiments. This suggests that the proposed approach for the description of wave propagation in a liquid with bubbles is applicable in a very wide range of conditions.

Key words: liquid with bubbles, nonlinear wave model, microscopic approach, comparison with experiment.

В естественных условиях и в различных технологических процессах жидкости и газы обычно содержат много инородных включений. Неоднородное состояние среды более типично, чем чистое состояние, причем концентрация частиц и их распределение по размерам может варьироваться в очень широких пределах. На практике частицы или пузырьки часто локализованы в ограниченных областях с резкими или размытыми границами и неравномерно распределены по пространству.

Огородников И. А., Бородулин В. Ю. Микроскопическая модель динамики гетерогенной среды. Взаимодействие акустических волн с пузырьковыми слоями // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9, № 2. С. 62—72.

Ogorodnikov I. A., Borodulin V. Yu. Microscopic model of the dynamics of a heterogeneous medium. Interaction of acoustic waves with bubble layers. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika*. 2016, 9, 2, 62—72.

Одним из типичных примеров такой среды является приповерхностный слой в океане, содержащий пузырьки газа. С динамикой взаимодействия жидкости и пузырьков связан ряд эффектов при распространении звуковых волн [1—6]. Даже для случая низких концентраций пузырьков (объемная доля пузырьков менее 0.1 %), структура звуковых волн может быть существенно изменена динамическим поведением пузырьков. Наличие пузырьков в слабо сжимаемой жидкости приводит к резкому увеличению эффективной сжимаемости смеси, в то время как ее плотность мало отличается от плотности жидкости. Поскольку реакция пузырька зависит от частоты и амплитуды возбуждающего сигнала, в среде возникает сильная дисперсия и нелинейность. При распространении волны испытывают дисперсионные изменения, что проявляется в изменении формы звуковой волны, ее спектра и скорости распространения различных частотных составляющих. Если пузырьки реагируют в фазе с возбуждающей волной, смесь становится менее жесткой, и в результате скорость волны уменьшается. Для высокочастотных составляющих в спектре широкополосного сигнала реакция пузырьков значительно запаздывает, и скорость распространения этих составляющих равна скорости звука в чистой жидкости. Нелинейность, связанная со сжимаемостью газовой фазы, проявляется уже при небольших интенсивностях звуковых волн, при которых нелинейные эффекты в чистой жидкости незаметны.

В задачах локации пространственные масштабы зондирующих сигналов могут иметь размеры как больше, так и меньше области, занятой пузырьковой средой. Это же относится к соотношению временных масштабов внешнего возмущения и внутренних характерных времен реакции пузырьков на внешние возмущения, и поэтому их динамическое поведение оказывает существенное влияние на прошедшие и отраженные сигналы.

Микроскопический подход при описании электромагнитного поля в веществе, учитывающий движение электронов, впервые предложен Г. Лоренцем [7]. Этот подход для вывода уравнений, описывающих динамику гетерогенной среды в виде смеси жидкости с пузырьками газа, был использован в [8]. В работах [9, 10] выведены общие уравнения для жидкости с пузырьками. Уравнения, полученные в [9, 10], в работах [11—13] применялись для расчета поля давления в кавитационном кластере с полидисперсным распределением пузырьков.

Цель работы заключается в последовательном выводе в общем виде системы уравнений движения для произвольного типа гетерогенной среды, учитывающей движение несущей среды как сплошной среды, движение каждой частицы и взаимное влияние частиц и несущей среды. Для приложения к задачам гидрофизики из полученной общей системы получить нелинейную волновую систему уравнений, позволяющую исследовать процессы взаимодействия звуковых импульсов с конечными по размеру областями в водной среде, содержащими пузырьки газа, и провести ее верификацию на экспериментальных данных, полученных в разных условиях.

Допущения и определения микроскопического подхода. Рассмотрим сплошную среду (жидкость или газ), которая занимает все пространство и имеет плотность $\rho(\vec{r}, t)$, где t — время, \vec{r} — радиус-вектор любой точки в среде. Положение N произвольно распределенных в ней частиц определяется радиус-векторами $\vec{r}_k(t)$. Плотность вещества частиц обозначим через ρ_1 . Будем считать, что частицы взаимодействуют только с несущей фазой, в качестве которой выступает окружающая их среда, и не взаимодействуют между собой непосредственно. Предположим также, что объем k -ой частицы v_k во много раз меньше объема L^3 , в пределах которого существенно меняются параметры течения, то есть

$$L^3 \gg v_k. \quad (1)$$

Это условие означает, что частица по отношению к характерному масштабу течения может рассматриваться как точечный объект. Условие (1) является основным допущением, существенно используемым при выводе уравнений движения гетерогенной среды в рамках микроскопического подхода.

При выводе уравнений движения гетерогенной среды плотность вещества частиц можно рассматривать как распределенную в пространстве непрерывным образом [14, 15]. Из-за движения частиц вместе с несущей средой и относительно нее, эта плотность $\tilde{\rho}_1$ является функцией координат и времени.

Согласно (1), $\tilde{\rho}_1$ всюду равняется нулю, кроме объемов, занятых самими частицами. Интеграл $\int \tilde{\rho}_1 dv$ по некоторому объему V определяет полную массу частиц в этом объеме. Исходя из этого определения, выражение для плотности $\tilde{\rho}_1$ можно выразить с помощью δ -функции [14, 15] в следующем виде:

$$\tilde{\rho}_1 = \sum m_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k), \quad (2)$$

где сумма берется по всем имеющимся в объеме частицам, $\delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$ характеризует положение k -ой частицы массой m_k из объема V в пространстве. Записи, подобные (2), позволяют обобщить определение плотности. Использование δ -функции удобно по причине ее информативности, т. к. она указывает факт разрыва сплошности несущей среды в точке локализации частицы, определяет ее место в пространстве и ее величину.

Для удобства вывода уравнений движения введем для каждой частицы величину относительного объема α_k следующим образом:

$$\alpha_k(\vec{r}, t) = v_k(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)). \quad (3)$$

В выражении (3) учтено, что у частицы может изменяться объем и ее положение относительно системы координат. Если в объеме, характеризующем задачу, содержится N частиц, то вместо относительного объема α_k вводится величина α :

$$\alpha = \sum_k^N \alpha_k. \quad (4)$$

Эта функция обобщает понятие объемного содержания частиц в гетерогенной среде. Интегрированием можно вычислить объем частиц в любой наперед заданной части пространства. Подчеркнем, что принятые определения допускают произвольное распределение частиц в несущей фазе. В некоторых областях их может не быть совсем. В предельных случаях гетерогенная среда может состоять из несущей фазы и всего одной частицы или, наоборот, из ансамбля частиц без несущей среды.

Проиллюстрируем это на следующем примере. На рис. 1 изображен объем среды с несколькими частицами. В этом случае количество вещества несущей фазы в данном объеме определяется формулой

$$\Delta m = \rho(\vec{r}, t) \left(S_0 \delta x - \sum_{k=1}^n v_k \right),$$

где $S_0 \delta x$ — элементарный объем пространства, занятого средой; $\sum_{k=1}^n v_k$ — объем, занятый n частицами.

Количество частиц n , которые могут находиться в данном элементарном объеме в любой момент времени, может быть произвольным. Для учёта этого обстоятельства можно использовать обобщающую запись объемного содержания частиц:

$$\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{S_0 \delta x} \int_{S_0 \delta x} \sum_{k=1}^N v_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) dV,$$

где N — количество частиц, содержащихся в пространстве.

Перепишем последнее выражение в виде

$$\alpha(\vec{r}, t) S_0 \delta x = \int_{S_0 \delta x} \sum_{k=1}^N v_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) dV$$

и подставим в формулу для количества вещества несущей фазы

$$\Delta m = \rho(\vec{r}, t) (S_0 \delta x - \alpha S_0 \delta x) = \rho(\vec{r}, t) S_0 \delta x (1 - \alpha(\vec{r}, t)).$$

Эта формулировка завершает пример перехода от обобщенного представления к обычно используемому представлению. Следует подчеркнуть, что все операции, связанные с преобразованиями уравнений, в последующих разделах осуществляются с использованием объемного содержания частиц α , аналогично представлению, рассмотренному в этом примере.

Для вывода дифференциальных уравнений движения гетерогенной среды воспользуемся законами сохранения массы, количества движения, момента количества движения, энергии и введенными выше определениями.

В областях несущей фазы, свободных от частиц, полные производные по времени от скорости несущей фазы в переменных Эйлера имеют обычный смысл

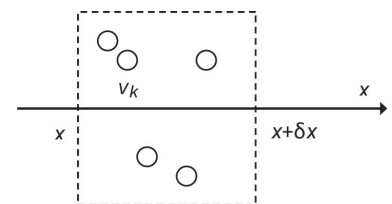


Рис. 1. Элементарный объем среды.

$$\frac{d}{dt}u_i = \frac{\partial}{\partial t}u_i + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}u_i, \quad (5)$$

где u_i, u_j — компоненты вектора поля скорости несущей фазы, $i, j = 1, 2, 3$. Полная производная по времени от плотности для несущей фазы $\rho(\vec{r}, t)$ тоже имеет обычный вид

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{\partial}{\partial t}\rho + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\rho. \quad (6)$$

Полная производная по времени для объемного содержания частиц определяется с учетом (5). В этом определении объем частицы является только функцией времени, а ее положение зависит от радиус-вектора $\vec{r}_k(t)$.

Полная производная по времени от объемного содержания α_k вычисляется как полная производная от сложной функции с учетом того, что α_k является линейным функционалом

$$\frac{d}{dt}\alpha_k = \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial \vec{r}_k} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt}.$$

Поскольку α_k зависит от разности \vec{r} и \vec{r}_k , то согласно (3)

$$\frac{\partial}{\partial r_k}\alpha_k = -\frac{\partial}{\partial r}\alpha_k.$$

Производная по времени от радиус-вектора частицы является скоростью ее движения V_k . Эта скорость определена только в той точке, где находится частица и не зависит от радиус-вектора \vec{r} . Таким образом, последняя формула окончательно записывается как

$$\frac{d}{dt}\alpha_k = \frac{\partial}{\partial t}\alpha_k - \vec{V}_k \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\alpha_k. \quad (7)$$

Формула (9) даёт значение полной производной по времени от функции $\alpha_k(\vec{r}, t)$. Первый член выражения характеризует изменение функции $\alpha_k(\vec{r}, t)$, обусловленное изменением объема частицы, а второй связан с переносом частицы с абсолютной скоростью \vec{V}_k .

Переход от α_k к α осуществляется суммированием по всем частицам. Используя введенные определения можно выписать уравнения, описывающие законы сохранения для гетерогенной среды.

Уравнение сохранения массы. Рассмотрим произвольный элементарный объем среды ΔV . Полная масса объема складывается из массы, которая приходится на долю несущей фазы, и массы частиц, попавших в объем ΔV . Масса, приходящаяся на несущую среду, определяется как $m = (\Delta V - \Delta V\alpha)\rho$, а полная масса частиц в объеме ΔV — как $m_1 = \Delta V\alpha\rho_1$. Следовательно, полная масса элементарного объема равна

$$M = \Delta V(1 - \alpha)\rho + \Delta V\alpha\rho_1. \quad (8)$$

Используя (8), закон сохранения массы можно записать для подвижной частицы смеси в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{dt}(\Delta V((1 - \alpha)\rho + \alpha\rho_1)) = 0.$$

Воспользовавшись тем, что $\frac{d}{dt}(\Delta V) = \text{div} \vec{u}(\Delta V)$, а также произвольностью объема ΔV , это уравнение можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}[(1 - \alpha)\rho + \alpha\rho_1] + [(1 - \alpha)\rho + \alpha\rho_1] \frac{\partial}{\partial x_j}u_j = 0.$$

Выполнив дифференцирование и перенеся в правую часть уравнения все члены, зависящие от объемного содержания α , в результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = \frac{1}{1-\alpha} \left(\rho \frac{d}{dt} \alpha - \frac{d}{dt} \alpha \rho_1 - \alpha \rho_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j \right). \quad (9)$$

Левая часть этого уравнения описывает изменение массы несущей среды в элементарном объеме. Правая часть уравнения (9) обусловлена наличием частиц в среде и учитывает их движение относительно несущей среды. Правую часть этого уравнения можно рассматривать как распределенный источник массы в несущей фазе, а плотность распределения этого источника описывается функцией $\alpha(\vec{r}, t)$.

Аналогично можно вывести другие уравнения движения, используя общие формулировки законов сохранения. В общем виде уравнения сохранения могут быть представлены уравнением [16]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho a + \text{div}(\rho a \vec{u}) = \vec{b} - \text{div} \vec{A}, \quad (10)$$

где a — удельное значение той величины, для которой выписывается закон сохранения; \vec{b} — плотность объемных факторов, изменяющих величину a ; \vec{A} — суммарная величина всех видов потоков через поверхность элементарного объема.

Уравнение сохранения количества движения. Сформулируем уравнение, описывающее закон сохранения количества движения для гетерогенной среды с учетом введенных выше определений. Из уравнения (8) можно выразить плотность гетерогенной среды ρ_c в элементарном объеме ΔV через величину объемного содержания α :

$$\rho_c = (1-\alpha)\rho + \alpha\rho_1. \quad (11)$$

Это выражение по внешнему виду совпадает с обычным определением плотности смеси для гетерогенной среды, используемым в осредненных моделях [17]. Между тем, эти выражения принципиально отличаются. Разница состоит в том, что вместо средней объемной концентрации в пределах элементарного объема, используемой в осредненных моделях, в выражении (11) вследствие определения (3) плотность ρ_c всюду внутри элементарного объема вне частиц принимает значение плотности несущей фазы, а в точке локализации частиц — плотности вещества частиц. Обозначим внешнюю силу воздействия через \vec{g} . Используя (10) и (11), закон сохранения импульса для гетерогенной среды можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1-\alpha)\rho + \alpha\rho_1) u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} ([(1-\alpha)\rho + \alpha\rho_1] u_i u_j + p_{ij}) = -\vec{g},$$

где по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование, p_{ij} — тензор напряжений в несущей фазе. Перенесем все члены, зависящие от относительного объема α , в правую часть этого уравнения и после приведения подобных членов получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho - \rho_1) \alpha u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho - \rho_1) \alpha u_i u_j - \vec{g}. \quad (12)$$

Здесь и далее обозначение p_{ij} относится только к тензору напряжения в несущей фазе. Понятие тензора напряжения в смеси не вводится по самому смыслу формулировки дискретного подхода к описанию гетерогенной среды.

Правая часть этого уравнения, так же как и правая часть уравнения, описывающего закон сохранения массы, обусловлена наличием в среде частиц. Наличие в среде частиц приводит к появлению распределенного источника количества движения в несущей фазе. Его характеристики также определяются движением частиц относительно жидкости, изменением объема частиц и их движением совместно с несущей фазой.

Уравнение сохранения энергии. Выберем в качестве сохраняющейся величины полную энергию элементарного объема. Энергия является аддитивной функцией и складывается из частей, приходящихся на составляющие среду компоненты. Для простоты рассмотрим только механическое взаимодействие между фазами, а тепло- и массообмен между фазами рассматривать не будем. Их учет принципиально не повлияет на вывод уравнений, но сделает правые части уравнения более громоздкими. Полная энергия элементарного объема равна сумме кинетической, внутренней энергий несущей фазы и полной энергии всех частиц, попавших в элементарный объем

$$E_{\text{пол}} = \rho(1 - \alpha) \left(\frac{u^2}{2} + U \right) + \rho_1 \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\frac{u_k^2}{2} + U_k \right), \quad (13)$$

где u — скорость несущей фазы, u_k — скорость k -ой частицы, U — внутренняя энергия несущей фазы; U_k — внутренняя энергия k -ой частицы. Введем обозначения $E = u^2/2 + U$, $E_1 = \rho_1 \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(\frac{u_k^2}{2} + U_k \right)$.

Кроме кинетической и внутренней энергий, в уравнении сохранения энергии необходимо учесть работу сил межфазного взаимодействия, возникающую из-за движения частиц относительно несущей фазы. Обозначим мощность сил межфазного взаимодействия через W . Явный вид этого члена, как и явный вид силы межфазного взаимодействия частицы и потока, определяется типом частиц, свойствами несущей среды и является основным вопросом, на который надо ответить при решении конкретных задач. Поступая так же, как при выводе двух предыдущих уравнений и используя векторные обозначения, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E + \text{div} \rho E \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \alpha (\rho E - \rho_1 E_1) + \text{div} \alpha (\rho E \vec{u} - \rho_1 E_1 \vec{V}) + W. \quad (14)$$

Трактовка правой части этого уравнения аналогична двум предыдущим: наличие частиц в смеси соответствует появлению источника энергии в несущей среде.

Уравнение сохранения момента количества движения. Теперь рассмотрим уравнение момента количества движения для гетерогенной среды. Это уравнение необходимо использовать в неоднородных средах с несущей средой, в которой есть градиенты скоростей на масштабе частиц. В этих условиях на частицы действует момент сил, приводящий к вращению частиц, которое влияет на характер течения.

Введем плотность моментов сил \vec{N} аналогично (3). Тогда уравнение, описывающее момент количества движения гетерогенной среды в векторной форме, можно записать [16] в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{r} \times \vec{u}) + \vec{r} \times \text{div} P = \frac{d}{dt} (\alpha \cdot (\rho - \rho_1)) \vec{r} \times \vec{u} + \vec{N}. \quad (15)$$

Для уравнения, описывающего баланс количества движения, неважно, имеет или нет частица конечные размеры. В уравнении (9) достаточно считать, что вся масса частицы сосредоточена в ее центре инерции. В уравнении, описывающем изменение момента количества движения, принципиально важно иметь в виду, что частицы в рассматриваемых гетерогенных средах имеют конечный размер, и параметры течения в несущей фазе на масштабе размера частицы могут заметно изменяться.

Уравнения (9), (12), (14), (15) описывают движение и изменение энергии в среде в целом. В правых частях полученных уравнений появляются неопределяемые из этих уравнений величины — скорости частиц, силы межфазного взаимодействия и моменты действующих на них сил. Эти величины необходимо определять для каждой конкретной задачи, причем они должны быть определены для каждой частицы. Чтобы система уравнений была полной, необходимо выписать уравнения движения и соответствующие уравнения моментов для каждой частицы.

Уравнения движения и уравнения моментов для частиц. Уравнения движения частиц можно записать в следующем виде

$$\frac{d}{dt} m_k \vec{V}_k = \vec{F}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Здесь \vec{F}_k — сила, действующая на k -ой частицу; N — число частиц в исследуемой области течения.

К этой системе необходимо добавить такое же количество уравнений для моментов частиц. Действительно, если частица находится в неоднородном силовом поле, на нее действует момент сил, возникающий из-за того, что частица имеет конечные размеры. В общем случае полный момент количества движения частицы \vec{J}_k можно представить в виде суммы момента количества движения центра инерции $\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k$ и собственного момента количества движения частицы относительно ее центра инерции \vec{J}_{1k} . В этом случае к уравнениям (16) необходимо добавить уравнения

$$\frac{d}{dt} \vec{J}_k = \vec{N}_k, k = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

где \vec{N}_k — момент внешних сил, действующих на частицу; N — число частиц в исследуемой области течения.

Полная система уравнений, описывающая движение и иные процессы в гетерогенной среде, состоит из уравнений (9), (12), (14), (15) и систем уравнений (16) и (17), которые содержат столько уравнений, сколько частиц находится в исследуемой области.

Окончательный вид системы уравнений. Полная система уравнений, описывающая динамику гетерогенной среды в предлагаемом подходе, имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\rho \frac{d}{dt} \alpha - \frac{d}{dt} \alpha \rho_1 - \alpha \rho_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho - \rho_1) \alpha u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho - \rho_1) \alpha u_i u_j - \vec{g}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E + \text{div} \rho E \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \alpha (\rho E - \rho_1 E_1) + \text{div} \alpha (\rho E \vec{u} - \rho_1 E_1 \vec{V}) + W, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{r} \times \vec{u}) + \vec{r} \times \text{div} P = \frac{d}{dt} (\alpha (\rho - \rho_1)) \vec{r} \times \vec{u} + \vec{N}, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} m_k \vec{V}_k = \vec{F}_k, k = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{J}_k = \vec{N}_k, k = 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

При выводе этой системы уравнений предполагалось, что несущая фаза является любой жидкой или газообразной сплошной средой, а частицы могут быть произвольными. Принципиальным является допущение о точечном характере частиц по отношению к минимальному характерному масштабу задачи. Нарушение этого условия определяет границу применимости микроскопического подхода. Вторым принципиальным моментом является то, что для каждой частицы необходимо выписывать собственное уравнение движения, уравнение моментов и определять силы взаимодействия для каждой частицы с потоком в отдельности, определять внешние силы.

В случае если в среде нет частиц, то объемное содержание равно нулю и уравнения автоматически сводятся к уравнениям для однородной жидкости. Если убрать несущую среду, то система сводится к системе уравнений потока невзаимодействующих частиц.

Уравнения состояния. Систему уравнений (18)—(23) необходимо дополнить уравнениями состояния несущей фазы и вещества, из которых состоят частицы. В общем случае все частицы могут состоять из разных веществ, следовательно, для каждой из них нужно свое уравнение состояния. Различия систем уравнений, описывающих динамику гетерогенной среды, которые получаются с применением методов осреднений и в предлагаемом подходе, состоят в том, что в последнем используются уравнения состояния вещества, из которого состоят фазы, и не вводится никаких средних характеристик.

Начальные и граничные условия. Начальные и граничные условия для несущей фазы задаются обычным образом и, кроме того, задаются начальные значения положений, скоростей и моментов для всех частиц.

Волны в жидкости с пузырьками газа. В качестве практического приложения на основе представлений микроскопической модели была построена волновая акустическая модель газожидкостной смеси. Нелинейная волновая система уравнений, описывающая распространение звука в жидкости с произвольно распределенными в ней пузырьками и с произвольной функцией распределения пузырьков по размерам, получается обычным выделением линейного волнового оператора для несущей фазы

из уравнений (18) и (19). Все члены, связанные с наличием пузырьков, рассматриваются как источники и переносятся в правую часть уравнений, причем для решения практических задач оставляются только монопольные члены, связанные с объемными пульсациями пузырьков. Волновое уравнение дополняется уравнениями Рэлея по количеству пузырьков в рассматриваемой области задачи. Таким образом, каждому пузырьку соответствует свое уравнение. Волновая система уравнений имеет вид [18]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(p \frac{\partial}{\partial t} \ln(1 - \alpha) \right), \quad (24)$$

$$R_k \frac{d^2 R_k}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR_k}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{\rho_0 R_k} \frac{dR_k}{dt} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_k} = \frac{1}{\rho_0} \left[P_0 + \frac{2\sigma}{R_{k0}} \right] \left(\frac{R_{k0}}{R_k} \right)^{3\gamma} - \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{p(\vec{r}_k, t)}{\rho_0}, \quad (25)$$

$$\alpha(\vec{r}, t) = \sum_k v_k(t) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)), \quad (26)$$

$$v_k(t) = \frac{4}{3} \pi R_k^3(t), \quad (27)$$

где $k = 1, \dots, N$. Система уравнений самосогласованная. Изменение радиусов пузырьков приводит к изменению их объемов, что, в свою очередь, изменяет правую часть волнового уравнения (24), вызывающего изменение самой волны.

Численное решение системы уравнений (24)—(27) осуществлено методами конечных разностей. Для этого разработаны алгоритмы и написаны оригинальные программы. Для решения волнового уравнения (24) использовались как явная схема типа крест, так и неявная типа Кранка—Николсона. Обе дают сходящиеся результаты с точностью 2-го порядка. Решение уравнения Рэлея для каждого пузырька осуществлялось методом Рунге—Кутты 4-го порядка точности.

Сопоставление с экспериментами. Для верификации модели проведем сопоставление численных решений системы (24)—(27) с результатами двух типов экспериментов. В первом исследовалось взаимодействие взрывных импульсов с пузырьковым слоем в свободном объеме воды [2, 3] (эксперименты выполнены Малых Н. В.). Во втором исследовалось распространение мощных звуковых импульсов в глицерине, насыщенном мелкими не всплывающими пузырьками [4]. Выбор этих экспериментов обусловлен полнотой описания условий экспериментов, методик проведения измерений и оценок погрешностей измеряемых величин, что позволило сформулировать точную математическую постановку задач.

Установка для исследования взаимодействия мощных импульсов с пузырьковыми слоями представляла собой заполненный водой гидробассейн размером $2 \times 2 \times 2$ м. На дне бассейна устанавливался генератор пузырьков, позволяющий создавать пузырьковые слои различной толщины в диапазоне от $2 \cdot 10^{-2}$ до 1.5 м и изменять объемное газосодержание α в диапазоне от 10^{-5} до 10^{-1} . Пузырьки создавались барботажем воздуха в жидкость через перфорированный толстостенный вакуумный шланг, уложенный рядами на дне бассейна. На разных расстояниях от пузырькового слоя (0—1.5 м) в бассейн опускался детонатор, взрыв которого создавал исследуемый импульс давления. Структура импульса регистрировалась миниатюрными широкополосными гидрофонами, которые могли устанавливаться в любой точке пузырькового слоя и в чистой жидкости перед слоем. Размер пузырьков вблизи датчиков определялся методом фотосъемки. Типичные осциллограммы измеренного профиля импульса как функция времени представлены на рис. 2.

Фронт начального сигнала имел длительность порядка 1 мкс. Взрыв детонатора создавал сферическую волну, амплитуда которой уменьшается пропорционально $1/r$. Поэтому в численных решениях в одномерной постановке для сопоставления с экспериментом в качестве начального выбирался сигнал, зарегистрированный в чистой жидкости в той же точке, где измеряется сигнал в газожидкостной среде. Максимальное значение амплитуды $P_g = 1.19$ МПа.

В численных решениях уравнений (24)—(27) для моделирования распределения пузырьков по размерам в экспериментах [2, 3], выбрана нормальная функция распределения с дисперсией 30 % относительно среднего размера пузырьков $R_0 = 350$ мкм при значении объемного газосодержания $\phi = 10^{-4}$. Размеры пузырьков в расчетной области задавались с помощью программы, генерирующей случайные числа с указанными параметрами.

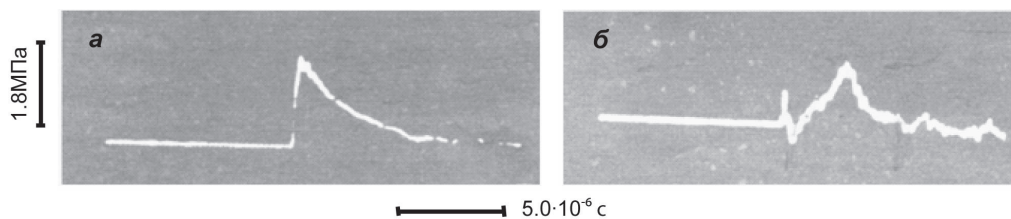


Рис. 2. Исходный сигнал в чистой жидкости и в пузырьковом слое [2, 3].

а — временная развертка исходного сигнала внутри слоя на расстоянии 0.3 м от границы слоя в отсутствие пузырьков;
б — временная развертка сигнала внутри слоя на расстоянии 0.3 м от границы слоя, $\varphi = 1 \cdot 10^{-3}$, $R_0 = 1 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 3, *а* приведены совмещённые начальный импульс, измеренный в эксперименте и его аппроксимация, используемая в численном решении системы (24)—(27). Длительность излучаемых импульсов (в натурном эксперименте и при математическом моделировании) — $6.2 \cdot 10^{-5}$ с. На рис. 3, *б* приведено сопоставление структуры прошедших сигналов на расстоянии 0.3 м от границы пузырькового слоя. Передний пик представляет собой звуковой предвестник. Его скорость равна скорости звука в чистой жидкости. Волновой предвестник несет в себе малую часть энергии. Основная часть энергии волны сосредоточена в импульсе. Скорость импульса (главной части сигнала) меньше скорости предвестника. Она зависит от амплитуды, от объемного газосодержания, а его характерная длительность совпадает со временем сжатия и расширения пузырька в волне, которое значительно больше периода собственных пульсаций пузырька [2, 3].

Из сравнения следует, что рассчитанная кривая удовлетворительно описывает форму импульса. Разница скоростей максимума сигналов, рассчитанная по времени прихода в точку наблюдения, меньше 10 %.

На рис. 4. приведено сравнение зависимости скорости предвестника и скорости главной части сигнала, несущего основную энергию, в зависимости от амплитуды исходного импульса. Линии представляют решение уравнений (24)—(27), точки — эксперимент. Эти зависимости получены из серии экспериментов по распространению взрывных импульсов в жидкости с пузырьками.

Графики, приведенные на рис. 4, показывают, что для всех случаев фронт предвестника распространяется со скоростью звука в чистой жидкости и его скорость не зависит от амплитуды падающей волны. Скорость главной части существенно зависит от амплитуды. Предложенная волновая система уравнений удовлетворительно описывает скорость распространения волнового предвестника и главной части в жидкости с пузырьками газа.

Приведем еще одно сравнение результатов расчетов, полученных при решении (24)—(27), и экспериментов, представленных в работе [4]. Эксперименты проводились в прямоугольной ювеве, в дно которой был встроен электродинамический излучатель, позволяющий варьировать амплитуду излучаемого импульса от 0.02 до 20 МПа. Над излучателем были расположены два гидрофона

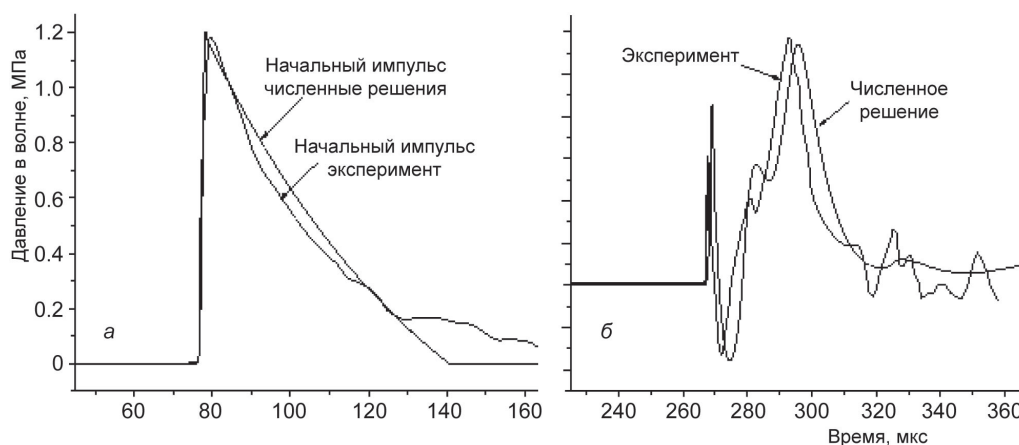


Рис. 3. Сопоставление структур для ударных импульсов в пузырьковой среде в свободном объеме [2, 3].

а — начальные импульсы в эксперименте и в расчете;
б — сравнение эксперимента и расчета на расстоянии 0.3 м от начала слоя.

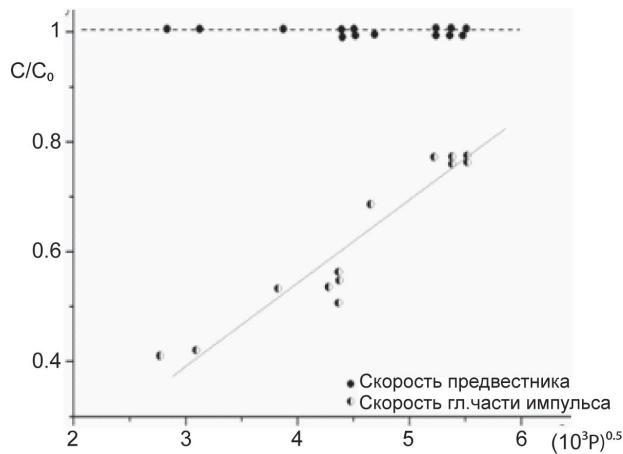


Рис. 4. Зависимость скорости звукового предвестника и основного сигнала от амплитуды.
 $\langle R_0 \rangle = 0.2 \cdot 10^{-2}$ м, $\varphi = 7 \cdot 10^{-4}$, газ — азот [2].
 Точки — эксперимент, линии — расчет.

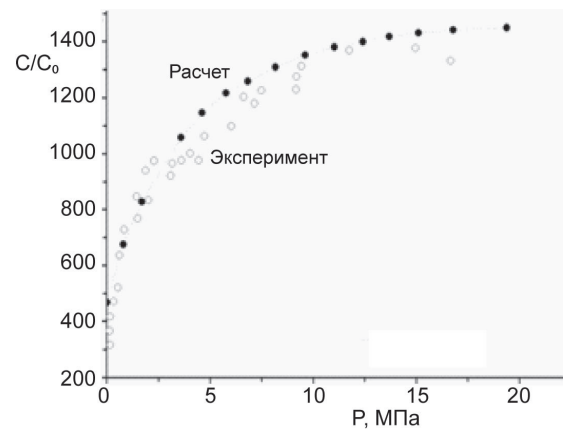


Рис. 5. Зависимость скорости звукового импульса от интенсивности в глицерине.
 $\langle R_0 \rangle = 0.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\varphi = 1.5 \cdot 10^{-3}$, газ — воздух [4].

на фиксированном расстоянии друг от друга. Измерялось время прохождения волны между датчиками. В кювету заливался глицерин, насыщенный пузырьками. Глицерин выстаивался до тех пор, пока в нем не оставались пузырьки, которые уже не всплывали. В экспериментах использовались импульсы, длительность которых была значительно больше периода собственных пульсаций самых крупных пузырьков. Поэтому все расчеты проводились для среднего радиуса, и учета функции распределения пузырьков по размерам не требовалось. На рис. 5 представлена зависимость скорости звукового импульса в глицерине с пузырьками воздуха от интенсивности исходного импульса.

В расчетах скорость распространения звукового импульса в глицерине вычислялась так же, как в эксперименте: по времени прохождения импульсом расстояния 0.06 м, разделяющего измерительные датчики. При распространении импульса от первого до второго датчика его амплитуда уменьшалась за счет затухания на 30 %, а это приводило к уменьшению значения скорости. График отражает среднее значение скорости звукового импульса на интервале измерения. Из графика следует, что скорость звукового импульса увеличивается с ростом амплитуды и асимптотически приближается к скорости звука в чистой жидкости.

Проведенные сравнения показывают, что полученная система уравнений позволяет с единых позиций количественно описывать наблюдаемые экспериментальные данные, и поэтому с ее помощью можно выявлять эффекты в тех областях, где нет экспериментальных данных.

Построена микроскопическая модель, которая позволяет описывать динамику гетерогенной среды с небольшим количеством частиц.

Система уравнений (18)—(23) обладает следующими свойствами. Несущая фаза представляет собой сплошную среду с внутренними силами, которые описываются тензором напряжений. Все изменения силовых взаимодействий относятся именно к несущей фазе. Частицам отводится роль источников массы, количества движения, момента количества движения и энергии по отношению к несущей фазе. В предлагаемой модели частицы сохраняют свои физические свойства. Благодаря определению (3) правые части в этой системе уравнений сохраняют свой вид и при наличии в среде всего одной частицы.

При решении конкретных задач можно использовать эти уравнения, точно определив конкретное положение частиц в пространстве \vec{r}_k при $t = 0$.

Принципиальным свойством «микроскопической» модели является то, что исходные свойства фаз в гетерогенной смеси не усредняются.

Проведено сопоставление с экспериментальными данными, показавшее качественное и количественное соответствие расчетов и экспериментов.

Литература

1. Fox F. et al. Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1955. № 27. P. 534—545.
2. Малых Н. В. и др. Скорость и затухание импульсов большой амплитуды в слое жидкости с пузырьками газа // Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Двухфазные потоки. Ин-т теплофизики, 1980. С. 38—51.
3. Małykh N. V. et al. Structure of pressure pulses in liquids with gas bubbles // Journal de physique. 1979. Т. 40, N 11. P. 300—305.
4. Дружинин Г. А. и др. Нелинейное отражение ударных волн и ударные кривые жидкостей с пузырьками газа // Тр. Междун. конф. «Нелинейные волны деформации». Таллин: Ин-т кибернетики, 1978. С. 66—69.
5. Rokusaev B. G. et al. Waves in gas-liquid medium of slag structure // Russian J. Eng. Thermophysics. 1991. V. 1, N. 4. P. 49—55.
6. Гасенко В. Г. и др. Предвестники в газожидкостных смесях // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 98, вып. 4. С. 221—227.
7. Лоренц Г. А. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, 2-е изд. / Пер. с нем. М., 1953. 150 с.
8. Огородников И. А. Резонансное формирование уединенных волн в среде со структурой. Препринт. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1983. 26 с.
9. Caflisch R. E. et al. Effective equations for wave propagation in bubbly liquids // J. Fluid Mech. 1985. V. 153. P. 259—273.
10. Caflisch R. E. et al. Wave propagation in bubbly liquids at finite volume fraction // J. Fluid Mech. 1985. V. 160. P. 1—14.
11. Ando K. et al. Numerical simulation of shock propagation in a poly-disperse bubbly liquid // Int. J. Multiphase Flow. 2011. V. 37. P. 596—608.
12. Ando K. et al. Improvement of acoustic theory of ultrasonic waves in dilute bubbly liquids // J. Acoust. Soc. Am. 2009. V. 126. P. 69—74.
13. Ando K. Shock propagation through a bubbly liquid in a deformable tube // J. Fluid Mech. 2011. V. 671. P. 339—363.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
15. Арнольд В. И. Математическое понимание природы. М.: МЦНМО, 2009. 144 с.
16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
17. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102—110.
18. Огородников И. А. и др. Дисперсионные свойства звуковых волн в жидкости с пузырьками газа // Тр. XXXI Всеросс. конф. «Сибирский теплофизический семинар». Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2014. С. 17—19.

Статья поступила в редакцию 19.05.2015 г.