УДК 629.12

© *К. А. Коваль, А. Л. Сухоруков, И. А. Чернышев*
АО Центральное конструкторское бюро морской техники «Рубин», Санкт-Петербург
su_andr@yahoo.com

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЕРИФИКАЦИИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАВНИКОВОГО ДВИЖИТЕЛЯ

Статья поступила в редакцию 25.12.2015, после доработки 06.05.2016.

На основе численных методов динамики вязкой жидкости определены гидродинамические и гидроакустические характеристики машущего крыла как основного конструктивного элемента плавникового движителя. Для верификации расчетной модели и последующего анализа плавниковых движителей более сложных конструктивных схем проведено сопоставление численных результатов с соответствующими аналитическими решениями и экспериментальными данными. Гидродинамические характеристики определялись на основе численного решения уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу, замкнутых k-ε Realizable моделью турбулентности. Для обеспечения вращения крыла в потоке использовался реализованный во многих расчетных комплексах механики жидкости и газа механизм «скользящих вычислительных сеток». Описан гибридный подход к построению математических моделей для определения шума плавникового движителя в дальнем поле с использованием уравнения Фокс Вильямса—Хоукингса. Верификация данного метода осуществлена на основе сопоставления вычислительных результатов с экспериментальными значениями уровней звукового давления при обтекании цилиндра потоком вязкого газа. Проведено сопоставление расчетных значений амплитуд пульсаций давления в дальнем поле при колебаниях крыла с аналитическими оценками, полученными в рамках модели воздействия на жидкость сосредоточенной пульсирующей силы как излучателя первого порядка. Предложенные вычислительные подходы могут применяться при проектировании перспективных пропульсивных систем, в основе которых используется машущее крыло.

Ключевые слова: гидродинамические характеристики, плавниковый движитель, машущее крыло, численное решение уравнений Навье-Стокса, акустическая аналогия.

K. A. Koval, A. L. Sukhorukov, I. A. Chernishev
JSC Central Design Bureau for Marine Engineering «Rubin», St.-Petersburg, Russia

RESULTS OF VERIFICATION OF THE NUMERICAL METHOD FOR CALCULATION OF HYDRODYNAMIC AND HYDROACOUSTIC CHARACTERISTICS OF THE FIN PROPULSOR

This work employs numerical methods of viscous fluid dynamics for determination of hydrodynamic and hydroacoustic characteristics of the oscillating wing as the major structural element of the fin propulsor. Verification of the calculation methods with subsequent analysis of the fin propulsors of more complex designs was carried out by means of comparison of numerical results against respective analytical solutions and experimental data. Hydrodynamic characteristics were determined based on the numerical solution of the Reynolds-averaged Navier—Stokes equations supplemented by the realizable model of turbulence. Rotation of the wing in the water flow was ensured by the mechanism of «sliding computation meshes» implemented in many computing software packages of mechanics of fluids and gases. Hybrid approach to mathematical modelling was described to assess the noise produced by the fin propulsor in the far field using the Ffowcs Williams—Hawkings equation. Verification of this method was based on comparison of the calculated results against experimental values of levels of acoustic pressure when viscous gas flows around the cylinder. The calculated values of pressure fluctuation amplitudes in the far field produced by wing oscillations were compared against analytical estimations obtained by means of modelling of the effect that concentrated fluctuating force (presented as dipole) produces on fluid. The proposed calculation approaches can be used for designing perspective propulsion systems based on the oscillating wing.

Ссылка для цитирования: *Коваль К. А., Сухоруков А. Л., Чернышев И. А.* Результаты верификации численного метода расчета гидродинамических и гидроакустических характеристик плавникового движителя // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2016. Т. 9, № 4. С. 60—72.

For citation: *Koval K. A., Sukhorukov A. L., Chernishev I. A.* Results of verification of the numerical method for calculation of hydrodynamic and hydroacoustic charachteristics of the fin propulsor. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika.* 2016, 9, 4, 60—72.

Key words: hydrodynamic characteristics, fin propulsor, oscillating wing, numerical solution of Navier—Stokes equations, acoustic analogy.

Сегодня плавниковый движитель рассматривается специалистами как один из перспективных типов движителя для малых подводных робототехнических средств. В многочисленных работах по гидробионике [1—3] отмечаются преимущества такого движителя, связанные с низким акустическим излучением, а в диапазоне чисел Рейнольдса, типичном для малых подводных аппаратов, он приближается к параметрам гребного винта по пропульсивным качествам. Разработка автономных необитаемых подводных аппаратов с движителем типа «машущее крыло» является одним их приоритетных направлений, о котором говорится и в зарубежных исследовательских программах [4].

При проектировании плавниковых движителей необходимо учитывать влияние следующих физических факторов: турбулентность обтекания, сложные нестационарные вихревые структуры, сходящие с крыла. Еще недавно учет этих факторов в математической модели движителя при заданных колебаниях крыла с большими амплитудами не представлялся возможным. Сейчас, в связи с интенсивным развитием вычислительных средств, появилась возможность численного определения его гидродинамических характеристик с целью последующего выбора конструктивных параметров.

В данной работе на основе численных методов динамики вязкой жидкости с использованием программного комплекса ANSYS/Fluent 15.0 определены гидродинамические и гидроакустические характеристики машущего крыла как основного конструктивного элемента плавникового движителя. Для верификации расчетной модели и последующего анализа плавниковых движителей более сложных конструктивных схем проведено сопоставление численных результатов с соответствующими аналитическими решениями и экспериментальными данными. Гидродинамические характеристики определялись на основе численного решения уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу, замкнутых Realizable моделью турбулентности. Для обеспечения вращения крыла в потоке использовался реализованный во многих расчетных комплексах механики жидкости и газа механизм «скользящих вычислительных сеток». Расчет гидроакустических характеристик плавникового движителя в дальнем поле осуществлялся на основе уравнения Фокс Вильямса—Хоукингса [5].

Определение гидродинамических характеристик плавникового движителя. В работе [6] описаны результаты экспериментальных исследований, выполненных сотрудниками Ленинградского политехнического института, по определению гидродинамических воздействий на колеблющееся в потоке крыло. Характеристики этого крыла и результаты эксперимента использовались авторами настоящей работы с целью верификации расчетной модели. Рассматривалось прямоугольное крыло малого удлинения с симметричным 20 %-ным профилем Жуковского, совершающее вращательные колебания с амплитудой 10°. Для устранения краевых эффектов крыло было снабжено концевыми шайбами. Ось вращения находилась на расстоянии 35 % хорды от носка крыла. Размах крыла был равен 267 мм, хорда b = 200 мм, так что удлинение крыла $\lambda = 1.335$. Для удобства монтажа датчиков давления крыло было выполнено из четырех отдельных блоков (рис. 1, *а*). Изменения мгновенного распределения давления проводились при помощи безынерционных индуктивных цилиндрических датчиков в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью. Гидродинамическое силовое воздействие определялось интегрированием замеренных давлений по контуру крыла. Скорость потока была v_0 = 22.8 м/с, так что число Рейнольдса, при котором проводились экспериментальные исследования, равнялось $\mathrm{Re} = 3.14 \cdot 10^5$. Частота колебаний равнялась n = 7.46 Гц, соответственно, число Струхаля $\mathrm{Sh} = 2\pi nb/v_0 = 0.411$.

Трехмерная модель крыла разработана в системе трехмерного моделирования Catia (рис. 1, *б*), затем был осуществлен ее экспорт в сеточный генератор ICEM CFD и построена соответствующая вычислительная сетка. Внешняя граница расчетной области представляла собой параллелепипед со встроенной сферической расчетной областью, содержащей рассматриваемый объект (рис. 2). Используемый скользящий интерфейс на границе сферической расчетной области обеспечивал возможность вращения крыла относительно внешней расчетной области. Амплитудное значение коэффициента нормальной силы, полученное при расчете, равно $c_y = 0.27$ и очень хорошо согласуется с соответствующим экспериментальным значением $c_y = 0.26$, что подтверждает возможность использования данного подхода для определения гидродинамических воздействий при колебаниях подводных объектов.

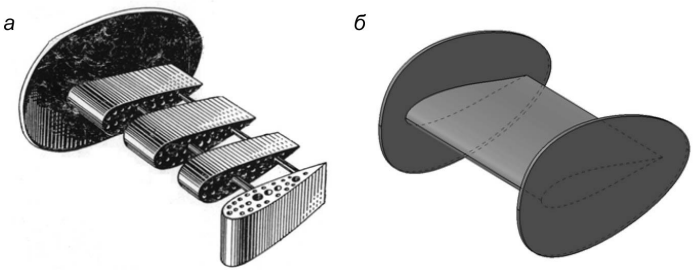

Рис. 1. Экспериментальная и расчетная модели.
а — прямоугольное крыло с шайбами;
б — трехмерная модель крыла.

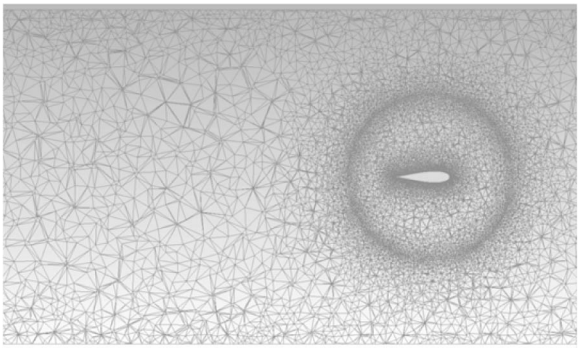

Рис. 2. Вычислительная сетка около крыла.

Затем, при этом же числе Рейнольдса был проведен расчет обтекания колеблющегося крыла в водной среде с частотами n = 0.52 Гц; 0.70 Гц; 1.14 Гц и 4.56 Гц, соответствовавшими числам Струхаля $\mathrm{Sh} = 2\pi nb/v_0$ = 0.41; 0.56; 0.91; 3.65. Размерения крыла принимались прежними. Скорость водного потока v_0 =1.57 м/с. Расчетное значение коэффициента производной подъемной силы по углу атаки крыла составило: $c_y^\alpha = 3.12$.

В работе [7] на основе допущения о квазиустановившемся характере движения крыла с использованием линеаризованной теории получены соотношения, позволяющие определить его гидродинамические характеристики при поступательно-вращательных колебаниях в потоке жидкости. Квазиустановившейся характер движения предполагает, что гидродинамические характеристики крыла, движение которого состоит из переменных линейных и угловых перемещений, в любой момент времени одинаковы с гидродинамическими характеристиками того же крыла, движущегося с постоянными линейной и угловой скоростями, равными действительным мгновенным значениям этих скоростей. Очевидно, что гипотеза о квазиустановившемся характере движения справедлива при относительно медленных перемещениях крыла, когда поля скоростей и давлений в потоке при его неустановившемся движении близки к соответствующим полям установившегося движения. В [7] на основе квазиустановившейся теории получены соотношения для определения подъемной силы и гидродинамического момента относительно оси вращения, действующих на крыло, совершающее поступательно-вращательные колебания в потоке:

$$F_y = \frac{\rho v_0^2}{2} b c_y^\alpha \left[\alpha + \frac{1}{v_0}\frac{dh}{dt} + \frac{1}{v_0}\left(\frac{3}{4}b - x_0\right)\frac{d\alpha}{dt} \right] L\,;\; c_y = \frac{F_y}{\frac{\rho v_0^2}{2} bL}\,; \tag{1}$$

$$M_z = \frac{\rho v_0^2}{2} b^2 \left\{ -\frac{b\pi}{8v_0}\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{x_0}{b} - \frac{1}{4}\right) c_y^\alpha \left[\alpha + \frac{1}{v_0}\frac{dh}{dt} + \frac{1}{v_0}\left(\frac{3}{4}b - x_0\right)\frac{d\alpha}{dt} \right] \right\} L\,;\; m_z = \frac{M_z}{\frac{\rho v_0^2}{2} b^2 L}\,, \tag{2}$$

где F_y — подъемная гидродинамическая сила; M_z — продольный гидродинамический момент относительно оси вращения крыла; c_y — коэффициент подъемной силы; m_z — коэффициент продольного момента; ρ — плотность жидкости; v_0 — скорость набегающего потока; b — хорда профиля; x_0 — расстояние от передней кромки профиля до оси вращения; α — угол атаки; h — вертикальное перемещение крыла; L — размах крыла.

Приведенные соотношения определяют гидродинамическое воздействие на крыло за счет циркуляции и не учитывают влияние присоединенной массы жидкости. Вместе с тем, как показали результаты сопоставления гидродинамических характеристик, полученные численно и на основе соотношений (1), (2), для относительно малых частот колебаний крыла наблюдается очень хорошее согласование значений гидродинамических воздействий. Это позволяет использовать формулы (1), (2) для исследования работы плавникового движителя при низких частотах колебаний крыла.

В качестве примера на рис. 3, 4 показаны зависимости изменения коэффициента подъемной силы при частотах колебаний крыла n = 1.14 Гц; 4.56 Гц с амплитудой 10°. На рис. 5, 6 представлены расчетные поля скоростей и давлений в момент времени соответствующий нулевому углу перекладки крыла.

Как показывают результаты расчетов, при частотах колебаний крыла менее 1.14 Гц условия квазиустановившегося характера обтекания очень хорошо выполняются. Соответствующие расчетная и теоретическая кривые изменения коэффициента подъемной силы практически накладываются друга (рис. 3). Анализ полей давлений потока на этой частоте показывает, что они в целом близки к соответствующим полям при фиксированном во времени угле перекладки крыла (рис. 5, *а*). Однако в кормовой зоне при нулевом угле перекладки наблюдается несимметрия поля давления, обусловленная именно вращательными колебаниями крыла. Анализ соответствующих полей скоростей показывает, что скос потока в кормовой зоне, связанный с нестационарными эффектами на данной частоте, выражен незначительно. Гидродинамический след за крылом распространяется по потоку и близок к параметрам следа, который реализуется при фиксированных положениях крыла (рис. 6, *а*).

По мере увеличения частоты до 4.56 Гц усиливается роль нестационарных гидродинамических явлений, обусловленных влиянием присоединенных масс и приростом циркуляции около крыла, обусловленной внезапным увеличением скоса потока. В данном случае в зависимости от направления движения крыла четко выделяются нагнетающая и засасывающая стороны профиля. Поля давлений существенно отличаются от соответствующих полей при фиксированных углах перекладки (рис. 5, *б*). Гидродинамический след при колебаниях крыла существенно отклоняется от направления основного потока (рис. 6, *б*). Это приводит к расхождению численных результатов и результатов, полученных по теории квазиустановившегося обтекания крыла.

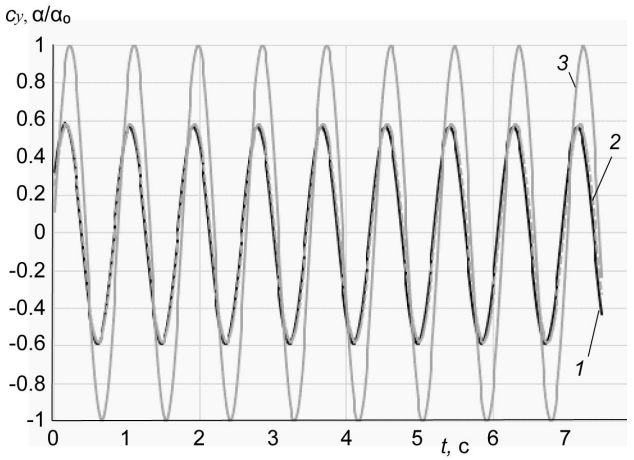

Рис. 3. Зависимости изменения коэффициента подъемной силы $c_{урасч.}$ (*1*), $c_{утеор.}$ (*2*) и безразмерного угла перекладки α/α_0 (*3*) от времени при частоте колебаний крыла n = 1.14 Гц.

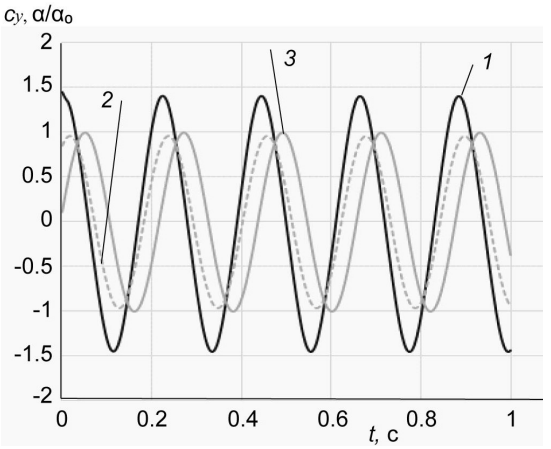

Рис. 4. Зависимости изменения коэффициента подъемной силы c_y и безразмерного угла перекладки от времени при частоте колебаний крыла n = 4.56 Гц.
Обозначения те же, что на рис. 3.

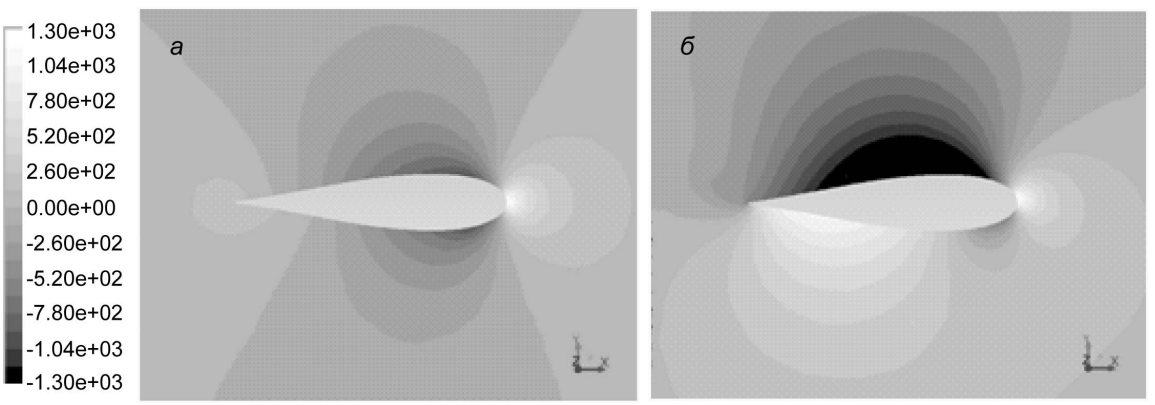

Рис. 5. Поля гидродинамических давлений (Па) при угле перекладки крыла α = 0°, перекладка на положительные углы.
а — частота n = 1.14 Гц; *б* — частота n = 4.56 Гц.

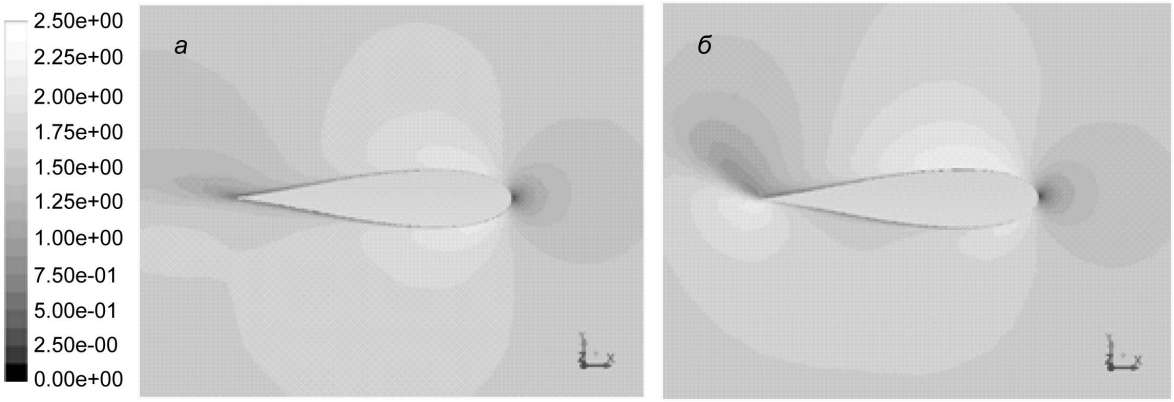

Рис. 6. Поля абсолютной величины скорости (м/с) при угле перекладки крыла α = 0°, перекладка на положительные углы.
а — частота n = 1.14 Гц; *б* — частота n = 4.56 Гц.

Влияние прироста сил циркуляционной природы, действующих на колеблющееся крыло из-за внезапного увеличения скоса потока при его существенно нестационарном движении, а также сил инерции присоединенных масс жидкости, осуществляется на основе линеаризованной теории нестационарного движения тонкого крыла [8]. В этом случае выражения для подъемной силы F_y и продольного гидродинамического момента M_z имеют вид:

$$F_y = \pi\rho b_1^2\left[\frac{d^2h}{dt^2} + v_0\frac{d\alpha}{dt} - b_1 a_h\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]L + 2\pi\rho v_0 b_1 C(k)\left[\frac{dh}{dt} + v_0\alpha + b_1\left(\frac{1}{2} - a_h\right)\frac{d\alpha}{dt}\right]L; \quad (3)$$

$$M_z = \pi\rho b_1^2\left[a_h b_1\frac{d^2h}{dt^2} - v_0 b_1\left(\frac{1}{2} - a_h\right)\frac{d\alpha}{dt} - b_1^2\left(\frac{1}{8} + a_h^2\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]L + \\ +2\pi\rho v_0 b_1^2\left(a_h + \frac{1}{2}\right)C(k)\left[\frac{dh}{dt} + v_0\alpha + b_1\left(\frac{1}{2} - a_h\right)\frac{d\alpha}{dt}\right]L, \quad (4)$$

где $b_1 = b/2$ — полухорда профиля; $a_h = (x_0 - b_1)/b_1$ — относительное расстояние между осью вращения и серединой хорды; $k = 2\pi n b_1/v_0 = \mathrm{Sh}/2$ — приведенная частота колебаний крыла; $C(k)$ — функция Теодорсена,

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}, \quad (5)$$

здесь $H_0^{(2)}$, $H_1^{(2)}$ — функции Ганкеля второго рода нулевого и первого порядка.

Функция Теодорсена (5) показывает, во сколько раз сила циркуляционной природы при нестационарном обтекании крыла изменяется по сравнению со значением квазиустановившейся подъемной силы, а также учитывает соответствующий сдвиг фаз так, что подъемная сила всегда запаздывает в своем изменении по сравнению с квазиустановившемся значением.

Таким образом, общие соотношения для гидродинамических сил и моментов, действующих на колеблющееся в потоке крыло, содержат как слагаемые нециркуляционной природы, связанные с влиянием присоединенных масс жидкости, так и слагаемые циркуляционной природы, связанные с изменением циркуляции около крыла при его неустановившемся движении.

В табл. 1 для частот вращательных колебаний крыла n = 1.14 Гц; 4.56 Гц с амплитудой 10° приведены амплитудные значения коэффициентов подъемной силы c_y и продольного момента m_z, полученные на основе:

— теории квазиустановившегося обтекания крыла [7];

— численного расчета уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу;

— теории нестационарного обтекания тонкого крыла [8].

Как уже отмечалось выше, для частоты колебаний 1.14 Гц результаты, полученные по теории квазиустановившегося обтекания крыла, очень хорошо согласуются с результатами численного расчета. Учет

Таблица 1

Амплитудные значения гидродинамических коэффициентов

Частота колебаний крыла n, Гц	Число Струхаля, $\mathrm{Sh} = \dfrac{2\pi nb}{v_0}$	Метод расчета	c_y	m_z
1.14	0.91	Теор. квазиуст. обтекания [7]	0.58	0.07
		Численный расчет	0.58	0.08
		Теор. нестац. обтекания [8]	0.80	0.11
4.56	3.65	Теор. квазиуст. обтекания [7]	0.95	0.18
		Численный расчет	1.45	0.30
		Теор. нестац. обтекания [8]	1.75	0.40

присоединенных масс и прироста циркуляции за счет нестационарных эффектов в рамках теории тонкого крыла приводит к некоторому увеличению амплитудных значений коэффициентов по сравнению с квазиустановившейся теорией. Так, например, амплитудное значение коэффициента подъемной силы, полученное на основе теории квазиустановившегося движения крыла $c_y = 0.58$, в то время как соответствующее значение, полученное на основе линеаризованной теории нестационарного обтекания тонкого крыла $c_y = 0.80$. Аналогичный эффект проявляется и для коэффициента продольного момента m_z. Данное рассогласование может быть объяснено тем, что в рамках теории нестационарного обтекания тонкого крыла оно схематизируется пластиной, которая обладает большим значением коэффициента подъемной силы по сравнению с профилем заданной толщины (в соотношения (3), (4) не входит производная коэффициента подъемной силы по углу атаки самого профиля).

При частоте колебаний 4.56 Гц гидродинамические характеристики, полученные на основе теории нестационарного обтекания, существенно превышают соответствующие зависимости, полученные в рамках теории квазиустановившегося обтекания крыла. Такой же эффект наблюдается и при численном расчете, однако амплитудные значения гидродинамических характеристик, полученные численно несколько ниже, чем полученные в рамках линеаризованной теории нестационарного обтекания тонкого крыла. Это опять же связано с тем, что в рамках линеаризованной теории нестационарного обтекания не учитывается телесность крыла и оно заменяется тонкой пластиной. Так, значение амплитуды коэффициента подъемной силы, полученное на основе теории квазиустановившегося обтекания крыла $c_y = 0.95$. Значение, полученное в рамках численного расчета $c_y = 1.45$. А значение, полученное в рамках линеаризованной теории нестационарного обтекания тонкого крыла $c_y = 1.75$. В то же время наблюдается очень хорошее согласование фаз колебаний гидродинамических воздействий, полученных численно и на основе линеаризованной теории нестационарного обтекания тонкого крыла. Аналогично поведение зависимостей для коэффициента продольного момента m_z.

Подводя итог, можно сказать, что при низких частотах колебаний крыла теория квазиустановившегося обтекания дает вполне приемлемые результаты. При существенно нестационарном движении теория квазиустановившегося обтекания крыла является оценкой снизу, а теория нестационарного обтекания тонкого крыла — оценкой сверху, и численные результаты находятся внутри этого диапазона. Таким образом, получены физически обоснованные значения гидродинамических воздействий, что позволяет использовать современные численные методы решения задач динамики вязкой жидкости при проектировании плавниковых движителей более сложных конструктивных схем.

Определение гидроакустических характеристик плавникового движителя. Численное исследование гидроакустических характеристик плавникового движителя в дальнем поле осуществлялось на основе метода Фокс Вильямса—Хоукингса. Если ранее исследователями были предложены аналитические оценки уровней шума от переменных гидродинамических воздействий на колеблющееся крыло с учетом соответствующей дипольной составляющей [9—12], то сейчас в связи с развитием вычислительной техники появилась возможность построения более сложных моделей, учитывающих нелинейные эффекты при турбулентном обтекании крыла потоком жидкости с учетом соответствующих квадрупольных источников звука.

Одним из методов определения звукового сигнала дальнего поля является использование численного расчета с решением уравнений движения жидкости во всей области, включая дальнее поле. Поскольку, как правило, ставится задача о вычислении флуктуирующей части давления, определяющей акустическую компоненту, на расстояниях, значительно превышающих размеры излучающего объекта, то такой прямой подход не является самым эффективным. Основные трудности вычислительного характера связаны с тем, что при решении соответствующих уравнений необходимо одновременное разрешение и гидродинамических, и акустических масштабов, которые отличаются на несколько порядков. Чтобы не получить погрешность большую, чем ожидаемый результат, требуется большой объем вычислений с высокой точностью расчетов, поскольку акустическая часть давления составляет весьма малую часть гидродинамической составляющей. Альтернативой является нахождение шума дальнего поля с использованием интегральных методов пространственных функций Грина. Данный подход подразумевает разбиение области задачи на две подобласти — ближнюю и дальнюю от источника. В ближней зоне находятся значения параметров поля из гидродинамического расчета, в дальней зоне для нахождения звука используется аппарат волновых функций Грина, построенных исходя из условия сшивки решений на границе областей.

В данной работе применяется интегральный метод Фокса Вильямса—Хоукингса [5], входными данными для которого являются результаты численного моделирования обтекания колеблющегося крыла в ближнем поле. Различные интегральные методы отличаются выбором пространственных функций Грина и поверхности, ограничивающей зону дальнего поля [13]. В классических методах Кирхгофа поверхность раздела выбирается лежащей в линейной области задачи, т. е. на достаточном удалении от источника, где скорость звука может считаться постоянной. В этом случае акустическая компонента давления должна удовлетворять волновому уравнению во внешней подобласти задачи:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} = 0, \tag{6}$$

где p' — акустическая пульсация давления; c_0 — скорость звука в среде; x_i — координата в i-ом направлении, здесь и далее предполагается суммирование по повторяющемуся индексу i.

Классический метод Кирхгофа может применяться одинаково вне зависимости от фактических механизмов возникновения сигнала внутри области. Основным преимуществом этого метода является простота и универсальность его формулировки. Однако в задачах, связанных с излучением звука турбулентными потоками, достаточно сложно указать область, где течение вышло на линейный режим (6), а существенное увеличение размеров внутренней области может приводить к чрезмерным вычислительным затратам.

Более специализированными являются методы, основанные на акустической аналогии Лайтхилла [14]. В данных методах используется то, что уравнения Навье—Стокса могут быть преобразованы к форме неоднородного волнового уравнения. Запишем уравнения неразрывности и импульса среды:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}, \tag{8}$$

где p — давление; σ_{ij} — тензор вязких напряжений.

Дифференцируя уравнение (7) по времени, а уравнение (8) по координате x_i и вычитая из первого результата второй, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\rho u_j u_i + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} p - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_{ij} \tag{9}$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho' - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\rho' c_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij}, \tag{10}$$

где использовано обозначение $T_{ij} = \rho u_i u_j + (p' - c_0^2 \rho')\delta_{ij} - \sigma_{ij}$ тензора напряжений Лайтхилла и флуктуаций давления и плотности соответственно $U_n = U_i n_i$ и $\rho' = \rho - \rho_0$.

Решение данного уравнения можно записать с помощью функции Грина. Для этого вводится контрольная поверхность $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ (поверхность Кирхгофа) разделяющая внутреннею и внешнюю области потока, и все переменные поля — плотность, импульс, давление доопределяются, чтобы корректно включить разрыв через поверхность раздела с использованием функции Хевисайда $H(f)$. В результате уравнение (9) или (10) преобразуется в уравнение Фокс Вильямса—Хоукингса:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho' H(f) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} c_0^2 \rho' H(f) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} H(f) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_i \delta(f)\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(q\delta(f)\right), \qquad (11)$$

где $F_i = -\left(\rho u_i \left(u_j - v_j\right) + p'\delta_{ij} - \delta_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} f$, $q = \left(\rho\left(u_j - v_j\right) + \rho_0 v_j\right)\frac{\partial}{\partial x_j} f$, v_j — компонента скорости движения контрольной поверхности f в j-ом направлении; $\delta(f)$ — дельта-функция с центром на контрольной поверхности.

Существенно, что данное уравнение является прямым следствием уравнений Навье—Стокса без использования каких-либо допущений. В общем случае граница подобластей $f = 0$ соответствует некоторой воображаемой проницаемой поверхности внутри потока. В пределе, когда граница совпадает с поверхностью крыла, она является непроницаемой. Важным преимуществом метода Фокс Вильямса—Хоукингса по сравнению с методом Кирхгофа является то, что контрольная поверхность в данном методе может располагаться в непосредственной близости к границам зоны турбулентности потока (в его невязкой нелинейной области), что позволяет ограничить зону мелкой сетки, необходимой для разрешения широкого спектра турбулентности и генерируемых ей звуковых волн, непосредственно турбулентной областью.

На практике в вычислительных кодах, в частности в ANSYS/Fluent, вместо дифференциальной формы (11) применяется интегральная форма уравнения Фокс Вильямса—Хоукингса. В интегральной форме решение уравнения Фокс Вильямса—Хоукингса относительно акустического давления $p' = p(\bar{x}, t) - p_0$ может быть записано в виде:

$$p'(\bar{x}, t) = p'_T(\bar{x}, t) + p'_L(\bar{x}, t) + p'_Q(\bar{x}, t); \qquad (12)$$

$$4\pi p'_T(\bar{x}, t) = \int_{f=0}\left[\frac{\rho_0\left(\dot{U}_n + U_{\dot{n}}\right)}{r\left(1 - M_r\right)^2}\right]_{ret} dS + \int_{f=0}\left[\frac{\rho_0 U_n\left(r\dot{M}_r + c_0\left(M_r - M^2\right)\right)}{r^2\left(1 - M_r\right)^3}\right]_{ret} dS; \qquad (13)$$

$$4\pi p'_L(\bar{x}, t) = \frac{1}{c_0}\int_{f=0}\left[\frac{\dot{L}_r}{r\left(1 - M_r\right)^2}\right]_{ret} dS + \int_{f=0}\left[\frac{L_r - L_M}{r^2\left(1 - M_r\right)^2}\right]_{ret} dS + \frac{1}{c_0}\int_{f=0}\left[\frac{L_r\left(r\dot{M}_r + c_0\left(M_r - M^2\right)\right)}{r^2\left(1 - M_r\right)^3}\right]_{ret} dS; \qquad (14)$$

$$4\pi p'_Q(\bar{x}, t) = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{f>0}\left[\frac{Q_{rr}}{r\left|1 - M_r\right|}\right]_{ret} dV + \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}\int_{f>0}\left[\frac{3Q_{rr} - Q_{ii}}{r^2\left|1 - M_r\right|}\right]_{ret} dV + \int_{f>0}\left[\frac{3Q_{rr} - Q_{ii}}{r^3\left|1 - M_r\right|}\right]_{ret} dV, \qquad (15)$$

где n_i — компонент вектора нормали к контрольной поверхности в i-ом направлении; $L_i = \left[\left(p - p_0\right)\delta_{ij} - \sigma_{ij} + \rho u_i\left(u_j - v_j\right)\right]n_j$; $U_i = \frac{\rho u_i}{\rho_0} + \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)v_i$; $U_n = U_i n_i$; $M_r = \frac{v_i r_i}{c_0}$ — проекция вектора числа Маха на направление наблюдателя в момент излучения звука; $\dot{M}_i = \frac{1}{c_0}\frac{\partial v_i}{\partial \tau}$, $M^2 = \frac{v_i v_i}{c_0^2}$, $U_{\dot{n}} = v_i\frac{\partial n_i}{\partial \tau}$, $U_{\dot{n}} = v_i\frac{\partial n_i}{\partial \tau}$, $M^2 = \frac{v_i v_i}{c_0^2}$, $L_r = L_i\frac{r_i}{r}$, $\dot{L}_r = \frac{\partial L_i}{\partial \tau}\frac{r_i}{r}$, $L_M = L_i\frac{v_i}{c_0}$, $Q_{ij} = \int_{f>0} T_{ij}dn$, $Q_{rr} = Q_{ij}r_i r_j$.

Индекс *ret* в подынтегральных выражениях означает, что выражение под знаком интеграла записано в момент излучения звука элементарным источником, то есть

$$\tau = t - r/c_0.$$

Интегрирование в соотношениях (12)—(15) производится в системе координат, связанной с источником. Набор соотношений (12)—(15) называют интегральной формулировкой Фарассата [15]. Именно эта форма уравнения Фокс Вильямса—Хоукингса наиболее часто применяется в вычислительных кодах и, в частности, на ее основе осуществляется расчет шума в дальнем поле в пакете ANSYS/Fluent.

В случае, когда контрольная поверхность совпадает с поверхностью твердого тела, слагаемые, стоящие в правой части (12), приобретают следующий смысл: $p'_Q(\overline{x},t)$ — определяется формой и кинематикой движения контрольной поверхности; $p'_Q(\overline{x},t)$ — генерируется силой, действующей на жидкость со стороны поверхности; $p'_Q(\overline{x},t)$ — определяется объемными источниками звука, находящимися вне контрольной поверхности.

Отметим, что впервые развернутое интегральное представление решения уравнений аэроакустики, допускающее детальную физическую интерпретацию источников турбулентного шума в присутствии границ, получено Керлом в работе [16]. Им показано, что нестационарная сила, сосредоточенная в окрестности акустически компактного тела при малых числах Маха (M < 1), генерирует в жидкости звуковое поле, практически такое же, как и точечный диполь.

Вычисление величины $p'_Q(\overline{x},t)$ требует интегрирования по объему, его расчет — крайне ресурсоемкая операция. Поэтому при практическом использовании метода Фокс Вильямса—Хоукингса выбирают проницаемую поверхность таким образом, чтобы она, по возможности, охватывала все источники звука, тогда объемным интегралом можно пренебречь. В ANSYS/Fluent используется общая формулировка с отброшенным объемным источниковым членом.

Решение уравнения Фокс Вильямса—Хоукингса ведется в физическом пространстве. В процессе проведения гидродинамического расчета на контрольной поверхности записывается информация о нестационарных гидродинамических параметрах потока. Выходными данными являются зависимости акустического давления в заданных точках от времени. Как правило, представляет интерес спектральная характеристика шума. Получение спектральной зависимости, а также интегральных характеристик шума возможно с использованием быстрого преобразования Фурье.

В качестве тестового примера для применения алгоритма численного интегрирования уравнения Фокс Вильямса—Хоукингса был выбран случай излучения звука при обтекании цилиндра потоком вязкого газа. Соответствующий экспериментально измеренный спектр уровней звукового давления приведен в работе [17]. Структура расчетной области выбиралось аналогично [17], однако вычислительная сетка содержала около 14 млн объемных элементов-гексаэдров. Это позволило существенно увеличить относительную длину цилиндра по сравнению с работой [17] и смоделировать непосредственно условия проведения эксперимента.

При проведении численного расчета задавались следующие граничные условия: на входе — скорость набегающего потока 15 м/с, температура 290 К; на выходе и верхней и нижней границах — открытая граница с атмосферным давлением и температурой 290 К. Диаметр цилиндра — 10 мм, длина цилиндра — 50 см. На боковых поверхностях ставились условия периодичности. Число Рейнольдса для заданного режима течения составляет порядка 10^4. При расчете использовался метод контрольных объемов со вторым

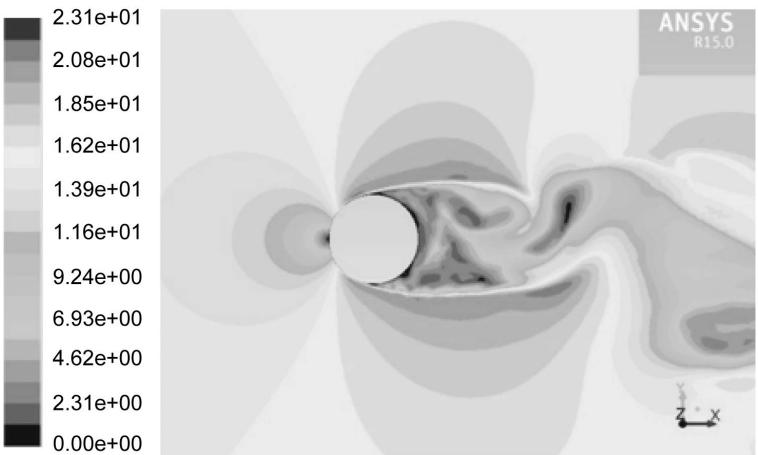

Рис. 7. Поле скорости потока, м/с.

порядком точности по пространству и по времени и LES подход для моделирования турбулентности с применением модели подсеточной вязкости Смагоринского. Расчет проводился в два этапа, сначала решение выводилось на периодический режим. Затем производилась запись в файлы нестационарных гидродинамических полей на четырех выбранных поверхностях. Для примера на рис. 7 приведено полученное в расчете мгновенное поле скорости потока в среднем по длине цилиндра сечении.

Выбранные поверхности Кирхгофа представляют собой цилиндрические поверхности с радиусом, равным 0.5; 1, 1.5 и 2 диаметра цилиндра, и осью, совпадающей с осью цилиндра. Будем называть их соответственно 0.5*D*, 1*D*,1.5*D* и 2*D*. Нестационарные поля на поверхностях 0.5*D*, 1*D*, 1.5*D* и 2*D* последовательно использовались для численного вычисления интеграла (12) в точке, где производился замер уровня звука в эксперименте. Эта точка находится на расстоянии 1 м над цилиндром, в средней точке по его длине, в плоскости, проходящей через ось цилиндра. Сигнал в этой точке вычислялся на основе различных поверхностей Кирхгофа, затем было выполнено преобразование Фурье и найден уровень звукового давления в децибелах рис. 8. При увеличении радиуса все больше источников охватывается поверхностью Кирхгофа. Начинают учитываться не только дипольные источники, связанные с силовым взаимодействием цилиндра и потока (как в случае совпадения поверхности Кирхгофа с поверхностью цилиндра 0.5*D*), но также и квадрупольные источники, связанные с турбулентностью в охваченной поверхностью Кирхгофа области течения. Из рисунка видно, что значение основной частоты срыва вихрей, полученное в расчете, очень хорошо согласуется с соответствующим экспериментальным значением $f \approx 300$ Гц. Экспериментальное выражение для основной частоты срыва вихрей имеет вид:

$$\tilde{f} = \mathrm{Sh}\frac{u}{D},$$

где $\mathrm{Sh} \approx 0.2$ — число Струхаля для цилиндра, u — скорость потока, D — диаметр цилиндра.

Расчетное значение уровня звукового давления на основной частоте 300 Гц составляет 61 дБ, соответствующее экспериментальное значение 68 дБ. Расхождение в 7 дБ может быть объяснено принятыми выше допущениями метода Фокс Вильямса—Хоукингса. По всей видимости, здесь играют роль квадрупольные источники звука в следе за цилиндром [18], которые не охватываются поверхностями Кирхгофа, а также, быть может, излишнее влияние диссипативных свойств численного метода. Вместе с тем данный пример показывает возможность получения расчетного спектра шума в дальнем поле при решении задач внешнего обтекания на основе предложенного подхода.

Подводный шум, возникающий в воде при работе плавникового движителя, определяется переменными во времени составляющими гидродинамических сил. На основе метода Фокс Вильямса—Хоукингса был проведен расчет шума в дальнем поле при колебаниях крыла. Как и ранее рассматривались вращательные колебания крыла с частотами 1.14 и 4.56 Гц. Приемники звука находились в точках, расположенных на расстоянии 50 и 250 м от оси вращения крыла по горизонтали и вертикали в вертикальной

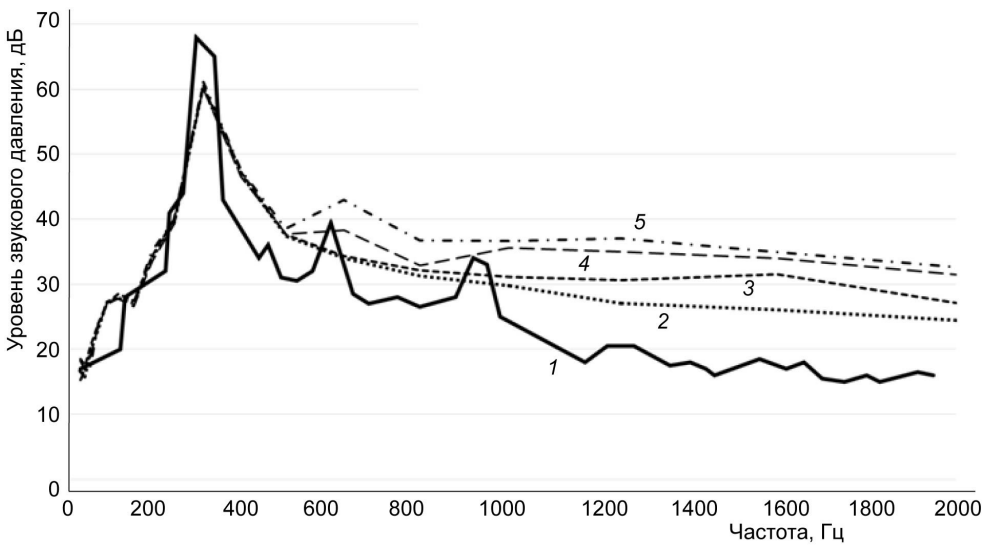

Рис. 8. Сравнение расчетных уровней звукового давления с экспериментальными данными.
1 — эксперимент; 2 — 0.5*D*; 3 — *D*; 4 — 1.5*D*; 5 — 2*D*.

плоскости, проходящей через среднее сечение крыла. Нумерация приемников соответствует рис. 9. В качестве поверхности Кирхгофа выбиралась поверхность скользящего интерфейса.

На рис. 10 представлены зависимости акустического давления от времени в точке 1 при частоте колебаний крыла 1.56 Гц, полученные методом Фокс Вильямса—Хоукингса, а также соответствующие осредненные значения полученные методом фильтрации высших гармоник. В точках 1 и 2, расположенных на вертикали основная частота пульсаций давления соответствует частоте колебаний крыла (частоте колебаний подъемной силы). В точках 3 и 4, расположенных на горизонтали, основная частота пульсаций давления в два раза выше соответствующей частоты колебаний крыла и соответствует частоте колебаний силы сопротивления. В точках, расположенных на диагонали 5 и 6, проявляются как колебания на частоте пульсаций подъемной силы, так и на частоте колебаний силы сопротивления.

Воздействие колеблющегося крыла на окружающую жидкость в дальнем поле может быть смоделировано действием сосредоточенных сил, соответствующих подъемной силе и силе сопротивления. Аналитическая оценка амплитуды акустического давления $|p'|$ в дальнем поле от действия сосредоточенной пульсирующей силы приведена в [9] на основе излучателя первого порядка — диполя и имеет вид:

$$|p'| = \frac{F}{4\pi r^2}\sqrt{k^2 r^2 + 1}\cos\theta, \tag{16}$$

где F — амплитуда периодических гидродинамических сил; λ — длина звуковой волны в воде; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число в безграничном пространстве; r — расстояние от излучателя до точки наблюдения; θ — угол между векторами $\vec{r}$ и $\bar{r}$.

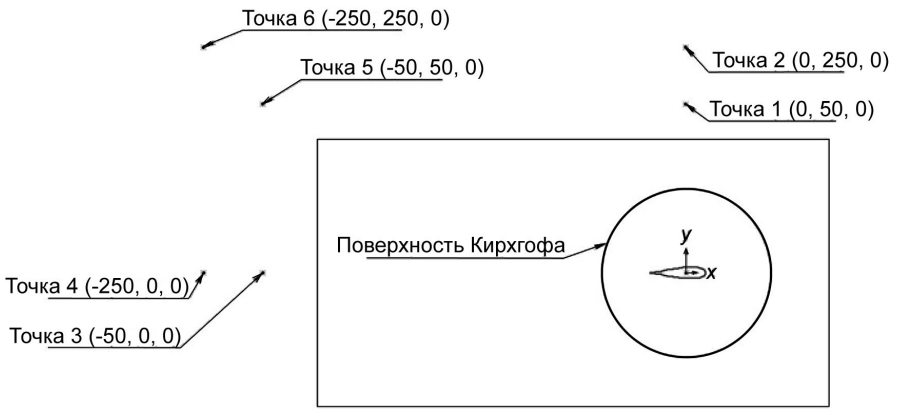

Рис. 9. Нумерация приемников звука.

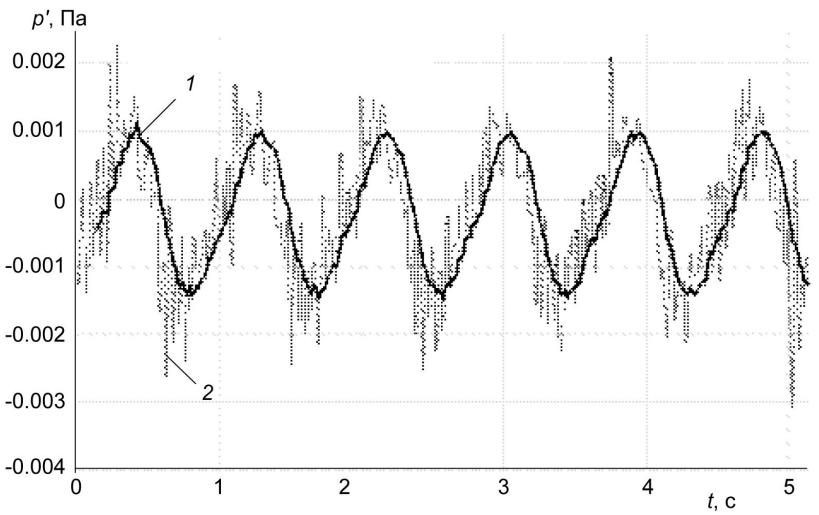

Рис.10. Акустическое давление в точке 1 (0,50,0) при частоте n = 1.14 Гц.
1 — осредненное значение p'; *2* — значение p', вычисленное методом Фокс Вильямса-Хоукингса.

Таблица 2

Амплитудные значения пульсаций давления в точках 1 и 2

	Частота колебаний крыла n, Гц	Амплитуда подъемной силы F_y, Н	Амплитуда пульсаций давления $\|p'\|$, Па (метод ФВ-Х)	Амплитуда пульсаций давления $\|p'\|$, Па (аналит.)
Точка 1	1.14	37	$1.2\cdot10^{-3}$	$1.2\cdot10^{-3}$
Точка 2	1.14	37	$0.8\cdot10^{-4}$	$0.73\cdot10^{-4}$
Точка 1	4.56	93	$6.0\cdot10^{-3}$	$4.1\cdot10^{-3}$
Точка 2	4.56	93	$0.7\cdot10^{-3}$	$0.58\cdot10^{-3}$

Таблица 3

Амплитудные значения пульсаций давления в точках 3 и 4

	Частота колебаний крыла n, Гц	Амплитуда силы сопротивления F_x, Н	Амплитуда пульсаций давления $\|p'\|$, Па (метод ФВ-Х)	Амплитуда пульсаций давления $\|p'\|$, Па (аналит.)
Точка 3	1.14	3	$2.0\cdot10^{-4}$	$0.98\cdot10^{-4}$
Точка 4	1.14	3	$5.0\cdot10^{-5}$	$0.59\cdot10^{-5}$
Точка 3	4.56	8.5	$2.5\cdot10^{-3}$	$3.74\cdot10^{-4}$
Точка 4	4.56	8.5	$5.0\cdot10^{-4}$	$5.28\cdot10^{-5}$

Полученные на основе расчета методом Фокс Вильямса—Хоукингса основные частоты пульсаций давления находятся в соответствии с формулой (16), так как на приемники звука в точках 1 и 2 оказывает влияние лишь изменение подъемной силы F_y, а на приемники звука в точках 3 и 4 — изменение силы сопротивления F_x. Из формулы (16) следует, что основным направлением снижения дискретного шумоизлучения плавникового движителя является уменьшение величины пульсирующих сил и снижение частоты их пульсации. В табл. 2 приведены амплитудные значения пульсаций давления для двух частот колебаний крыла в точках 1 и 2, полученные на основе метода Фокс Вильямса—Хоукингса и по формуле (16). Как видно, наблюдается хорошее согласование амплитудных значений пульсаций давления, полученных расчетным путем и аналитически. Это подтверждает, что основной вклад в шумоизлучение плавникового движителя в поперечном направлении дает дипольная составляющая, связанная с периодическим изменением подъемной силы.

Как видно из табл. 3, амплитудные значения пульсаций давления в точках 3 и 4 значительно различаются. При этом пульсации давления, полученные методом Фокс Вильямса—Хоукингса оказываются существенно выше. По всей видимости, это связано с тем, что аналитическая оценка не учитывает квадрупольных источников звука, появляющихся в следе за крылом.

Приведенное сопоставление с аналитическими оценками и согласование основных частот пульсаций акустического давления с частотами колебаний гидродинамических сил показывает, что метод Фокс Вильямса—Хоукингса может эффективно применяться для решения данного класса задач.

***

На основе численных методов динамики вязкой жидкости определены гидродинамические и гидроакустические характеристики машущего крыла, являющегося основным конструктивным элементом плавникового движителя. Для верификации расчетной модели и последующего анализа плавниковых движителей более сложных конструктивных схем проведено сопоставление численных результатов с соответствующими аналитическими решениями и экспериментальными данными.

Описан гибридный подход к построению математических моделей для определения шума плавникового движителя в дальнем поле с использованием метода Фокс Вильямса—Хоукингса. Верификация данного метода осуществлена на основе сопоставления вычислительных результатов с экспериментальными значениями уровней звукового давления при обтекании цилиндра потоком вязкого газа. Проведено сопоставление расчетных значений амплитуд пульсаций давления в дальнем поле при колебаниях

крыла с аналитическими оценками, полученными в рамках модели воздействия на жидкость сосредоточенной пульсирующей силы как излучателя первого порядка.

Представленные расчетные методы позволяют повысить эффективность проектно-конструкторских работ за счет комплексного многопараметрического анализа влияния различных факторов на гидродинамические и гидроакустические характеристики движителей с машущим крылом.

References

1. *Slizhevski N. B.* Hydrobionics in Ship-Building. *Nikolaev, Published by Admiral Makarov National University of Shipbuilding,* 2002. 112 p. (in Russian)
2. *Kozlov L. F.* Theoretical Bio-Hydrodynamics. *Kiev, Vyssha Shkola,* 1983. 240 p. (in Russian)
3. *Kozlov L. F.* Essay on Hydrobionics. *Kiev, Naukova Dumka,* 1985. 110 p. (in Russian)
4. Robotic Visions to 2020 and beyond — The Strategic Research Agenda for robotics in Europe, 07/2009. URL: http://www.roboticsplatform.eu (Date of access: 27.12.2014)
5. *Ffowcs Williams J. E., Hawkings D. L.* Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. A264, 1969, 321—342.
6. *Yakovenko V. V.* On Pressure Distribution along the Surface of Profile Harmonically Oscillating in the Progressive Flow. *Proceedings of Leningrad Polytechnic Institute.* 1953, 5 (in Russian).
7. *Fyn Ya. Ts.* Introduction to Aaeroelasticity. *Moscow, Fizmatlit,* 1959. 524 p. (in Russian).
8. *Bisplinghoff R. L., Ashley H., Halfman R. L.* Aeroelasticity. Moscow, Inostrannaya Literatura, 1958. 799 p. (in Russian).
9. *Miniovich I. Ya., Pernik A. D., Petrovski V. S.* Hydrodynamic Sources of Noise. *Leningrad, Sudostroyeniye,* 1972. 317 p. (in Russian).
10. *Petrovski V. S.* Hydrodynamic Problems of Turbulent Noise. *Leningrad, Sudostroyeniye,* 1966. 252 p. (in Russian).
11. *Smoliakov A. V.* Noise of Turbulent Flows. *Leningrad, Krylov Shipbuilding Research Institute,* 2005. 312 p. (in Russian).
12. *Lamb H.* Hydrodynamics. *Moscow-Leningrad, Gostekhizdat,* 1947. 928 p. (in Russian).
13. *Karabasov S. A.* Application of Hybrid Method for Modelling of Noise Produced by Helicopter High-Speed Rotors. *Mathematical Modelling.* 2006, 18, 2, 3—23.
14. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically, I: general theory. *Proceedings of the Royal Society.* A221, 1952, 564—587.
15. *Brentner K. S., Farassat F.* An Analitical Comparision of the Acoustics Analogy and Kirchhoff Formulation for Moving Surfaces. *AIAA Journal.* 1998, 36, 8, 1379—1386.
16. *Curle N.* The Influence of Solid Boundaries upon Aerodynamic Sound. *Proceedings of the Royal Society.* Ser: A231, 1955, 505—510.
17. *Usanin M. V.* Application of Acoustic Analogy for Calculation of Sound in the Far Field. *Mathematical Modelling of Systems and Processes.* 2004, 12, 101—109.
18. *Goldstein M. E.* Aeroacoustics. *Moscow, Mashinostroyeniye,* 1981. 294 p. (in Russian).