

УДК 519.6:531.32

© Б. В. Архипов, Д. А. Шапочкин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН), Москва  
arh12.bor12@yandex.ru

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РАСТЕКАНИЯ НЕФТЯНЫХ РАЗЛИВОВ НА ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ

Статья поступила в редакцию 24.04.2018, после доработки 14.11.2018.

К вопросам математического моделирования нефтяных разливов на поверхности моря в последнее время приковано значительное внимание исследователей. Не смотря на то, что в этой области предложен ряд подходов для моделирования основных процессов переноса и трансформации нефти на поверхности моря, многие из них по ряду причин не удовлетворительны и не соответствуют данным наблюдений и/или экспериментов. Причина этого в сложности этих процессов, имеющих комплексный характер. В построенных моделях одновременно рассматриваются значительное число действующих факторов и вводятся большое количество подбираемых параметров в используемых выражениях, что приводит к трудностям при анализе (интерпретации) результатов. В связи с этим имеется необходимость рассматривать не независимо отдельные процессы, сопровождающие трансформацию нефтяного разлива. В настоящей работе внимание концентрируется на процессе растекания нефтяного разлива и движении его границы. Подход основывается на решении системы уравнений в частных производных вытекающих из рассмотрения баланса сил, действующих на осесимметричное пятно. Цель работы состоит в построении метода численного решения способного правильно описать движение контактной границы разлива. Оригинальность предлагаемого подхода заключается в том, что в нем, с одной стороны, предлагаются граничные условия специфические для каждой стадии Фэя, а с другой стороны рассматривается способ численного решения уравнения растекания на основе метода характеристик. Показано, что получаемое численное решение согласуется с формулами Фэя.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, нефтяной разлив, растекание, метод характеристик, контактная граница.

*B. V. Arkhipov, D. A. Shapochkin*

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russia

## SOME PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE EQUATION FOR OIL SPILLS SPREADING ON THE SEA SURFACE

Received 24.04.2018, in final form 14.11.2018.

The mathematical modeling of oil spills on the sea surface has recently attracted considerable attention of researchers. Despite the fact that a number of approaches for modeling the main processes of oil transport and transformation on the sea surface are proposed in this area, many of them are not satisfactory and do not correspond to the data of observations and/or experiments. The reason for this is the complexity of these processes, which are complex. In the constructed models, a significant number of acting factors are simultaneously considered and a large number of selected constants are introduced in the expressions used, which leads to difficulties in the analysis (interpretation) of the results. In this regard, there is a need to consider independently the individual processes accompanying the transformation of the oil spill. This paper focuses on the process of oil spill spreading and the movement of its boundary. The approach is based on the solution of the system of partial differential equations (PDE) arising from the consideration of the balance of forces acting on the axisymmetric spot. The aim of the work is to construct a method of numerical solution capable of correctly describing the motion of the contact boundary of the spill. The originality of the proposed approach lies in the fact that, on the one hand, it offers boundary conditions specific to each Fay’s stage, and on the other hand, a method of characteristics is considered

Ссылка для цитирования: Архипов Б. В., Шапочкин Д. А. О некоторых свойствах решения уравнения растекания нефтяных разливов на поверхности моря // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2019. Т. 12, № 1. С. 62—74.

For citation: Arkhipov B. V., Shapochkin D. A. Some properties of solutions of the equation for oil spills spreading on the sea surface. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2019, 12, 1, 62—74.

doi: 10.7868/S2073667319010088

to numerical solution of the problem considered. It is shown that the resulting numerical solution is consistent with the Fay's formulas. characteristics is considered to numerical solution of the problem considered. It is shown that the resulting numerical solution is consistent with the Fay's formulas.

**Keywords:** mathematical modeling, oil spill, spreading, characteristic method, contact line.

Проблемы, связанные с загрязнением окружающей среды в результате нефтяных разливов, привели к необходимости разработки математических моделей, описывающих процесс переноса и трансформации нефтяных разливов на поверхности моря. Эти модели выполняют важную роль при решении практических задач оценки воздействия на окружающую среду и ликвидации нефтяных разливов [1—3].

Сложность моделирования трансформации нефтяного разлива в окружающей среде заключается в многообразии процессов (воздействий), которым подвергается нефтяной объем, оказавшийся в естественных условиях. Нефтяной разлив на поверхности моря со временем существенно изменяет свои свойства. Легкие фракции испаряются, под действием обрушающихся ветровых волн часть нефти в виде капель переходит в воду и рассеивается (диспергирование), в то же время вода поступает в нефть, и на поверхности возникает эмульсия, частично нефть растворяется в воде, а также фотоокисляется под действием солнечных лучей. В результате свойства нефти (плотность, вязкость, поверхностное натяжение и т. п.) со временем изменяются. В совокупности эти процессы носят название выветривания. При их исследовании, с одной стороны, необходимо одновременно учитывать процессы разной природы, описываемые зачастую в терминах различных областей знаний, а с другой стороны, возникают существенные трудности с количественным описанием некоторых из этих процессов, обусловленные отсутствием теорий, удовлетворительно описывающих происходящие явления (процессы растекания, диспергирования, эмульсификации и т. п.) [4].

Реальное нефтяное пятно в процессе эволюции испытывает ряд превращений. В начальный период оно имеет довольно сложную форму, вытянутую по направлению ветра. В головной части пятна (толстый слик) сосредоточена большая часть массы нефти. В окружающем кольце (темная нефть) нефти существенно меньше. Остальная часть нефтяного пятна (тонкий слик) содержит не более доли процента от всей массы разлива и имеет толщину менее 1 мкм. В то же время площадь тонкого слика существенно превышает площадь остальной части [3, 4]. Его поведение подчиняется закономерностям тонких масляных пленок, разлитых на поверхности другой жидкости. Пока пятно сохраняет сплошность, его граница является линией контакта трех сред: воды, нефти и воздуха. В этой области значительную роль играют силы поверхностного натяжения. Со временем нефтяное пятно теряет сплошность и превращается сначала в набор полос, а затем — отдельных пятен. Если выветривание продолжается длительное время, то на поверхности моря образуются отдельные комки (желтый мусс), свойства которых существенно отличаются от исходного состава. Строго говоря, в настоящее время не существует модели, основанной на уравнениях гидродинамики, способной описать такие особенности, и поэтому в существующих моделях используются более или менее грубые подходы (параметризации), учитывающие лишь часть свойств, сопровождающих растекание.

Одни из первых результатов по количественному описанию растекания нефтяных разливов были получены в известных работах Фэя [5, 6]. В этих работах было рассмотрено одномерное и осесимметричное растекание нефти по неподвижной водной поверхности. Было выделено три стадии процесса растекания (в зависимости от типа преобладающих сил, действующих на нефтяное пятно): инерционно-гравитационная, гравитационно-вязкая и поверхностно-вязкая. Для каждой из этих стадий была получена степенная зависимость радиуса пятна от времени (с различными показателями степени на различных стадиях) с коэффициентом пропорциональности, определяемым на основе экспериментальных данных. В некоторых работах указывается, что формулы Фэя недооценивают размер нефтяного разлива, хотя в некоторых работах есть сведения и о противоположной тенденции. В то же время, поскольку формулы Фэя наиболее часто используются при оценке размеров нефтяного пятна, при моделировании по другим моделям желательнее соотносить их выводы с фэевскими данными [3, 4].

В ряде работ для описания процесса растекания нефтяных разливов используются обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), в определенном смысле обобщающие формулы Фэя [7—11]. Данные ОДУ получаются при грубых допущениях о форме разлива (как правило, принимаемого в виде

кругового цилиндра или конуса) и использовании приближенных формул для сил, влияющих на растекание [11]. Моделирование растекания на основе ОДУ является, несомненно, более развитым подходом в сравнении с использованием алгебраических формул. Такой подход позволяет описывать весь процесс растекания в рамках одной общей постановки без необходимости разбиения его на различные стадии, а также дает возможность относительно просто и естественно вводить в модель различные процессы выветривания, рассматривать одномерное или осесимметричное растекание, а также две постановки — непрерывное вытекание или залповый сброс.

Расширением моделей на основе ОДУ являются модели, приводящие к уравнениям в частных производных (УрЧП) [12—16]. Такие подходы позволяют учитывать некоторые дополнительные особенности, такие как изменение толщины нефти внутри пятна, а также неправильную форму разлива, однако они обычно требуют больших вычислительных затрат и достаточно трудны в реализации, в частности, в силу необходимости рассматривать контактную движущуюся границу, окаймляющую нефтяное пятно. При построении полноценных двумерных моделей движение контактной границы разлива описывается, как правило, достаточно грубо — на основе метода частиц с недостаточно обоснованными граничными условиями [12—16]. Вопрос постановки граничных условий и точность этого метода для описания движения границы не исследован. При использовании метода блуждающих частиц появляются дополнительные сложности согласования сплошности нефтяного разлива и дискретности используемого подхода.

В настоящей работе рассматривается уравнение растекания на основе УрЧП, подобного уравнению, приведенному в работах [12, 13], но в осесимметричном варианте. Цель работы состоит в построении метода численного решения, способного правильно описать движение границы разлива. Оригинальность рассматриваемого подхода заключается в том, что в нем предлагаются граничные условия для каждой стадии ФЭя и способ численного решения уравнения растекания на основе метода характеристик. В результате реализации этого метода показано, что получаемое решение согласуется с аналитическими решениями и/или формулами ФЭя. Последние вытекают из основного уравнения модели в результате уравнивания пар сил в соответствии с подходом ФЭя, преобладающих на каждой стадии процесса растекания.

**Общая постановка, лагранжевы координаты, получение автомодельных решений и формулы ФЭя.** Рассмотрим растекание нефтяного разлива на поверхности моря на основе уравнений мелкой воды [12—19] в осесимметричном варианте в полярных координатах. Обозначения основных величин приведены в табл. 1.

$$\frac{\partial rh}{\partial t} + \frac{\partial rhu}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial rhu}{\partial t} + \frac{\partial rhu^2}{\partial r} = -\Delta ghr \frac{\partial h}{\partial r} - C_t r \frac{2\sigma}{\rho_0 h_m} \frac{\partial h}{\partial r} - C_v \frac{\rho_w}{\rho_0} r \frac{v_w^{1/2}}{R^{1/2}} u^{3/2}. \quad (2)$$

Граничные и начальные условия для системы (1—2) рассмотрены ниже. Уравнение (2) выражает баланс четырех сил: 1 — силы инерции (левая часть), 2 — гравитационной силы (градиента давления, первое слагаемое справа), 3 — силы поверхностного натяжения, 4 — силы поверхностного трения слоя нефти о водную поверхность [12, 13]. Отметим некоторые особенности используемого уравнения (2). Во-первых, в гравитационный член (первое слагаемое в правой части уравнения) вместо полного гравитационного ускорения входит редуцированное ускорение  $\Delta g = g(\rho_w - \rho_0)/\rho_w$ . Во-вторых, в правой части присутствует слагаемое, связанное с силой поверхностного натяжения. Для введения этой силы используется коэффициент Харкинса [12, 13, 20, 21]  $\sigma = \sigma_{wa} - \sigma_{wo} - \sigma_{oa}$ . В этом подходе для упрощения считаем, что сила поверхностного натяжения распространена по всему пятну и вызвана градиентом поверхностного натяжения. В-третьих, оценку силы трения на нижней поверхности нефтяного слоя получаем на основе формулы Блазиуса для силы трения при обтекании плоской пластинки набегающим потоком со скоростью  $u$  [22]:

$$F_f \approx C_\tau \left( \frac{\rho_w^2 v_w u^3}{x} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где  $x$  — продольная координата, отсчитываемая от передней кромки пластинки. Ясно, что в настоящей модели нет претензии на подробное описание погранслоя в воде, его структуры и изменения по

## Обозначения основных величин

## Designation of basic parameters

Название	Обозначение
Время	$t$
Радиальная координата	$r$
Радиальная компонента скорости	$u$
Изменение толщины слоя нефти	$h(r)$
Толщина слоя нефти в центре пятна	$h_m$
Радиус нефтяного пятна	$R$
Гравитационное ускорение	$g$
Плотности нефти и воды	$\rho_o, \rho_w$
Кинематические вязкости нефти и воды	$\nu_o, \nu_w$
Динамические вязкости нефти и воды	$\mu_o, \mu_w$
Редуцированное гравитационное ускорение	$\Delta g = \frac{\rho_w - \rho_o}{\rho_w} g$
Поверхностное натяжение на границах раздела вода-воздух, вода-нефть, нефть-воздух	$\sigma_{wa}, \sigma_{wo}, \sigma_{oa}$
Коэффициент Харкинса	$\sigma = \sigma_{wa} - \sigma_{wo} - \sigma_{oa}$
Напряжение трения	$F_f$
Подбираемые константы	$C_t, C_v$

радиусу силы трения. Поэтому формула (3) используется для оценки этой силы, где расстояние, отсчитываемое от передней кромки пластинки, заменено линейным масштабом равным радиусу разлива аналогично работе [12]. Отметим, что применимость такого подхода обосновывается тем фактом, что при его использовании автомоделные решения, выводимые ниже, дают правильный показатель степени в изменении радиуса совпадающий с формулой Фэя. Сила трения записывается через параметры пограничного слоя, возникающего в воде, и в ее выражение входят плотность и вязкость воды, а не нефти.

Преобразуем задачу (1—2) к безразмерной форме [23]. Исходя из постановки, определяем набор определяющих (искомых и задаваемых) величин. Выбираем новые основные единицы. Например, вместо кг, м, с (основные единицы в СИ) в качестве новых единиц объема выбираем объем нефти  $V_0$  [м<sup>3</sup>], единиц плотности — плотность  $\rho_0$  [кг/м<sup>3</sup>], единицы ускорения —  $\Delta g = g(\rho_w - \rho_o)/\rho_w$  [м/с<sup>2</sup>]. Выводим одночлены, связывающие масштабы производных единиц с масштабами исходных. Для значений масштабов основных независимых новых единиц выбираем специфические значения, связанные с числовыми значениями соответствующих определяющих параметров. Связь старых (размерных) и новых (безразмерных) значений имеет вид, представленный в табл. 2.

Введем безразмерные параметры:

$$C_1 = V_0^{-1/2} \Delta g^{-1/2} \nu_w, C_2 = \rho_0^{-1} \rho_w, C_3 = \rho_0^{-1} V_0^{-2/3} \Delta g^{-1} \sigma$$

$$C_4 = C_v C_2 C_1^{1/2}, C_5 = C_t C_3 \quad (4)$$

Используя выражения (4), получаем безразмерную постановку (для облегчения изложения будем обозначать все искомые функции в безразмерной постановке теми же переменными):

$$\frac{\partial rh}{\partial t} + \frac{\partial rhu}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial rhu}{\partial t} + \frac{\partial rhu^2}{\partial r} = -rh \frac{\partial h}{\partial r} - C_5 \frac{2}{h_m} r \frac{\partial h}{\partial r} - C_4 \frac{r}{R^{1/2}} u^{3/2}. \quad (6)$$

**Связь старых (размерных) и новых (безразмерных) значений**  
**Relationship of old (dimensional) and new (dimensionless) values**

Название величины	Связь «размерных» и «безразмерных» переменных
Длина	$R = V_0^{1/3} \mathfrak{R}$
Время	$t = \Delta g^{-1/2} V_0^{1/6} \tau$
Скорость	$\dot{R} = V_0^{1/6} \Delta g^{1/2} \mathfrak{R}$
Объем	$V = V_0 Y$

Лагранжевы координаты вводим путем замены независимых переменных следующего вида:

$$t = t(\xi, \tau) = \tau$$

$$r = r(\xi, \tau)$$

Лагранжевы координаты отличаются от произвольных координат, изменяющихся со временем, тем свойством, что их скорость движения равна скорости частиц жидкости. Переходя к новым координатам в (5, 6) и учитывая, что якобиан преобразования  $J = \partial r / \partial \xi$ , получаем постановку в лагранжевых координатах:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (Jrh) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (Jrhu) = -rh \frac{\partial h}{\partial \xi} - C_5 \frac{2}{h_m} r \frac{\partial h}{\partial \xi} - C_4 J \frac{r}{R^{1/2}} u^{3/2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = u. \tag{9}$$

Для системы (7—9) необходимо сформулировать начальные и граничные условия. В качестве начальных условий необходимо задавать начальный радиус и распределение толщины нефтяного слоя и его скорости. Граничные условия формулируются ниже (38—40, 47). Ищем автомодельное решение [12, 13, 17, 18, 23] задачи (7—9) в виде:

$$r = \xi \tau^\gamma, J = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \tau^\gamma, R(\tau) = \xi_m \tau^\gamma, h = h(\xi) \tau^\alpha, u(\xi, \tau) = u(\xi) \tau^\beta = \gamma \xi \tau^{\beta-1}, \tag{10}$$

где  $\xi_m$  и  $R(\tau)$  граница разлива в лагранжевых и эйлеровых координатах, соответственно. Из (9) следует  $\frac{\partial r}{\partial \tau} = u(\xi, \tau) = \gamma \xi \tau^{\gamma-1}$ , следовательно  $\beta = \gamma - 1$ . Подставляя в (7) выражения для  $r$ ,  $J$  и  $h$  из (10) получаем  $\alpha + 2\gamma = 0$  т. е.  $\alpha = -2\gamma$ . Суммируя, получаем выражения для основных искомым функций:

$$r = \xi \tau^\gamma, R(\tau) = \xi_m \tau^\gamma, J = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \tau^\gamma, u(\tau, \xi) = u(\xi) \tau^{\gamma-1}, u(\xi) = \gamma \xi, h(\tau, \xi) = h(\xi) \tau^{-2\gamma}. \tag{11}$$

На инерционно-гравитационной стадии из (8) получаем  $\frac{\partial}{\partial \tau} (Jrhu) = -rh \frac{\partial h}{\partial \xi}$ . С учетом (7) это

уравнение преобразуется к виду  $J \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial h}{\partial \xi}$ . Подставляя в него (11), имеем  $\tau^\gamma \gamma \xi (\gamma - 1) \tau^{\gamma-2} = -\tau^{-2\gamma} \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi}$ .

Приравнивая сумму показателей при временном множителе нулю, получаем  $\gamma = 0.5$ . Для толщины слоя получаем уравнение  $\gamma \xi (\gamma - 1) = -\frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi}$ , из которого находим  $h(\xi) = h_m - 0.5\gamma (\gamma - 1) \xi^2$ . Величину  $h_m$

(толщина в центре пятна) определяем из условия нормировки:  $2\pi \int_0^{\xi_m} h(\xi) \xi d\xi = 1$ . Это условие вытекает

из постоянства объема:  $2\pi \int_0^{R(t)} h r dr = 1$ , из которого получаем  $2\pi \int_0^{\xi_m} h(\xi) \tau^{-2\gamma} \xi \tau^\gamma d\xi \tau^\gamma = 2\pi \int_0^{\xi_m} h(\xi) \xi d\xi = 1$ .

Т. е. постоянство объема выполняется, несмотря на изменяемость со временем  $r(\tau, \xi)$  и  $h(\tau, \xi)$ . В результате, на инерционно-гравитационной стадии выводим:

$$h = h(\xi)\tau^{-1}, u(\tau, \xi) = 0.5\xi\tau^{-0.5}, r = \xi\tau^{0.5}, J = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \tau^{0.5}, R(\tau) = \xi_m\tau^{0.5}. \quad (12)$$

На границе разлива для инерционно-гравитационной стадии из (12) получаем связь  $h(\tau, \xi_m)$  и  $u(\tau, \xi_m)$  в виде

$$u(\tau, \xi_m) = 0.5\xi_m\tau^{-0.5} = \frac{0.5\xi_m}{[h(\xi_m)]^{1/2}} [h(\xi_m)\tau^{-1}]^{1/2} = \frac{0.5\xi_m}{[h(\xi_m)]^{1/2}} [h(\tau, \xi_m)]^{1/2} = \sqrt{C_f h(\tau, \xi_m)}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{u(\tau, \xi_m)}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h(\tau, \xi_m)}, \text{ где } C_f = \frac{(0.5\xi_m)^2}{h(\xi_m)}. \quad (13)$$

На гравитационно-вязкой фазе из (8) следует  $0 = -rh\frac{\partial h}{\partial \xi} - C_4 J \frac{r}{R^{1/2}} u^{3/2}$ . Подставляя в это уравнение (11) выводим  $0 = -\xi h(\xi) \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi} - C_4 \frac{\xi\tau^{6\gamma-3/2}}{(\xi_m)^{1/2}} (\gamma\xi)^{3/2}$ . Откуда  $\gamma = 0.25$ . Следовательно  $h^2(\xi) = h_m^2 - C_4 \frac{(\gamma)^{3/2}}{(\xi_m)^{1/2}} (4/5)(\xi^{5/2})$ . Величину  $h_m$  определяем из условия нормировки. В результате на гравитационно-вязкой фазе получаем:

$$h = h(\xi)\tau^{-0.5}, r = \xi\tau^{0.25}, R(\tau) = \xi_m\tau^{0.25}, u(\tau, \xi) = u(\xi)\tau^{-0.75} = \gamma\xi\tau^{-0.75}. \quad (14)$$

Из (14) следует связь  $h(\tau, \xi_m)$  и  $u(\tau, \xi_m)$  на границе разлива на гравитационно-вязкой стадии:

$$u(\tau, \xi_m) = 0.25\xi_m\tau^{-0.75} = \frac{0.25\xi_m}{[h(\xi_m)]^{3/2}} [h(\xi_m)\tau^{-0.5}]^{3/2} = \frac{0.25\xi_m}{[h(\xi_m)]^{3/2}} [h(\tau, \xi_m)]^{3/2} = \left[ \sqrt{C_f h(\tau, \xi_m)} \right]^3,$$

т. е.

$$\frac{u^{1/3}(\tau, \xi_m)}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h(\tau, \xi_m)}, \text{ где } C_f = \frac{(0.25\xi_m)^{2/3}}{h(\xi_m)}. \quad (15)$$

Используя (11) на поверхностно-вязкой фазе из (8) получаем  $0 = -C_5 \frac{2}{h_m} \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{C_4 J}{R^{1/2}} u^{3/2}$  или  $0 = -C_5 \frac{2}{h_m} \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi} - \frac{C_4 \tau^\gamma}{(\xi_m \tau^\gamma)^{1.2}} (\gamma\xi\tau^{\gamma-1})^{3/2}$ . Следовательно,  $\gamma = 3/4$  и  $h(\xi) = h_m - \frac{C_4}{2C_5} \frac{h_m \gamma^{3/2}}{\xi_m^{1/2}} (2/5)\xi^{5/2}$ .

Из условия нормировки находим  $h_m$ . В результате на поверхностно-вязкой стадии имеем:

$$r = \xi\tau^{3/4}, R(\tau) = \xi_m\tau^{3/4}, J = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \tau^{3/4}, u(\tau, \xi) = u(\xi)\tau^{-1/4}, u(\xi) = \gamma\xi, h = h(\xi)\tau^{-3/2}. \quad (16)$$

Используя (16), получаем связь  $h(\tau, \xi_m)$  и  $u(\tau, \xi_m)$  на границе для поверхностно-вязкой стадии:

$$u(\tau, \xi_m) = 0.75\xi_m\tau^{-0.25} = \frac{0.75\xi_m}{[h(\xi_m)]^{1/6}} [h(\xi_m)\tau^{-1.5}]^{1/6} = \frac{0.75\xi_m}{[h(\xi_m)]^{1/6}} [h(\tau, \xi_m)]^{1/6} = \left[ \sqrt{C_f h(\tau, \xi_m)} \right]^{1/3},$$

т. е.

$$\frac{u^3(\tau, \xi_m)}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h(\tau, \xi_m)}, \text{ где } C_f = \frac{(0.75\xi_m)^6}{h(\xi_m)}. \quad (17)$$

Полученные условия (13), (15), (17) используются для численного решения соответствующих уравнений. Формулы Фэя [5, 6] для залпового сброса объема  $V_0$  для разных стадий растекания имеют следующий вид. На инерционно-гравитационной стадии  $R = k_{2i} \Delta g^{1/4} V_0^{1/4} t^{1/2}$ , в безразмерном виде  $\mathfrak{R} = k_{2i} \tau^{1/2}$ .

На гравитационно-вязкой стадии имеем  $R = k_{2vf} V_0^{1/3} \Delta g^{1/6} (v_w)^{-1/12} t^{1/4}$  или  $\mathfrak{R} = k_{2vf} C_1^{-1/12} \tau^{1/4}$ . На поверхностно-вязкой получаем  $R = k_{2i} \left( \frac{\sigma^{1/2}}{\rho_w^{1/2} v_w^{1/4}} \right) t^{3/4}$  или  $\mathfrak{R} = k_{2i} C_3^{1/2} C_1^{-1/4} \tau^{3/4}$ . Здесь коэффициенты  $k_{2i} = 1.14$ ,  $k_{2vf} = 1.45$ ,  $k_{2t} = 2.3$  подобраны Фэем по экспериментальными данным.

**Построение характеристической формы и численное решение.** Придадим полученной системе характеристическую форму. Из (7—9) простыми преобразованиями получаем

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{h}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{hu}{r}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left( 1 + C_5 \frac{2}{hh_m} \right) \frac{1}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{C_4}{hR^{1/2}} u^{3/2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = u(\xi, \tau). \quad (20)$$

Уравнение (20) уже имеет характеристическую форму. Для преобразования (18—19) представим их в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \tau} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{J} \\ \frac{1}{\alpha^2 J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{hu}{r} \\ -\frac{C_4}{hR^{1/2}} u^{3/2} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $\alpha = \left( 1 + C_5 \frac{2}{hh_m} \right)^{-1/2}$ . Умножим (21) на вектор  $(l, m)$

$$(l, m) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \tau} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} \end{pmatrix} + (l, m) \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{J} \\ \frac{1}{\alpha^2 J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{pmatrix} = (l, m) \begin{pmatrix} -\frac{hu}{r} \\ -\frac{C_4}{hR^{1/2}} u^{3/2} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Определим собственные числа и вектора входящей в (22) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{J} \\ \frac{1}{\alpha^2 J} & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Для матрицы (23) получаем задачу на собственные значения

$$(l, m) \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{J} \\ \frac{1}{\alpha^2 J} & 0 \end{pmatrix} = \lambda(l, m) \quad (24)$$

или

$$\left( l \cdot 0 + m \frac{1}{\alpha^2 J}, l \cdot \frac{h}{J} + m \cdot 0 \right) = \lambda(l, m).$$

Перепишывая (24) в виде линейной системы

$$l \cdot 0 + m \frac{1}{\alpha^2 J} = \lambda l, \quad (25)$$

$$l \cdot \frac{h}{J} + m \cdot 0 = \lambda m. \quad (26)$$

Используем условие равенства нулю определителя системы (25—26)

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{\alpha^2 J} \\ \frac{h}{J} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{h}{\alpha^2 J^2} = 0. \quad (27)$$

Из (27) получаем собственные числа

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{h}}{\alpha J}, \quad (28)$$

а из самой системы (25—26) находим собственные вектора матрицы  $A$

$$m = \pm \alpha \sqrt{h} l. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (22) получаем характеристическую форму

$$\begin{aligned} \left( l_1 \frac{\partial h}{\partial \tau} + m_1 \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \lambda_1 \left( l_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + m_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) &= \left( -\frac{hu}{r} l_1 - \frac{C_4}{R^{1/2}} u^{3/2} m_1 \right), \\ \left( l_2 \frac{\partial h}{\partial \tau} + m_2 \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \lambda_2 \left( l_2 \frac{\partial h}{\partial \xi} + m_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) &= \left( -\frac{hu}{r} l_2 - \frac{C_4}{R^{1/2}} u^{3/2} m_2 \right). \end{aligned}$$

Переставляя слагаемые, получаем

$$\left( \frac{\partial h}{\partial \tau} + \lambda_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) + \frac{m_1}{l_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \left( -\frac{hu}{r} - \frac{C_4}{R^{1/2}} u^{3/2} \frac{m_1}{l_1} \right), \quad (30)$$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial \tau} + \lambda_2 \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) + \frac{m_2}{l_2} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \left( -\frac{hu}{r} - \frac{C_4}{R^{1/2}} u^{3/2} \frac{m_2}{l_2} \right). \quad (31)$$

Подставляя выражение для собственных чисел (28) и собственных векторов (29) в (30—31) и деля на  $\sqrt{h}$ , получаем систему (18—20) в виде:

$$\left( \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial \tau} + |\lambda| \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial \xi} \right) + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + |\lambda| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \left[ -\frac{\sqrt{hu}}{2r} - \frac{C_4}{hR^{1/2}} u^{3/2} \frac{\alpha}{2} \right], \quad (32)$$

$$\left( \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial \tau} - |\lambda| \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial \xi} \right) - \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} - |\lambda| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \left[ -\frac{\sqrt{hu}}{2r} + \frac{C_4}{hR^{1/2}} u^{3/2} \frac{\alpha}{2} \right], \quad (33)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = u. \quad (34)$$

Рассмотрим производную вдоль характеристики при  $\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \lambda$  и  $y = \sqrt{h}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dF \{y[\tau, \xi(\tau)], u[\tau, \xi(\tau)]\}}{d\tau} &= \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\tau} \right) + \frac{\partial F}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\tau} \right) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial F}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

Из такого представления следует, что в левой части системы (32—34) стоят полные производные по характеристикам, так что ее можно переписать в виде:

$$\frac{dF_1}{d\tau} = \left( -\frac{\sqrt{hu}}{2r} - C_4 \frac{1}{2hR^{1/2}} u^{3/2} \alpha \right) \text{ при } \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \lambda_1, \quad (35)$$

$$\frac{dF_2}{d\tau} = \left( -\frac{\sqrt{hu}}{2r} + C_4 \frac{1}{2hR^{1/2}} u^{3/2} \alpha \right) \text{ при } \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \lambda_2, \quad (36)$$

$$\frac{dF_3}{d\tau} = u \text{ при } \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (37)$$

Здесь  $F_3 = r$ ,  $\frac{\partial F_1}{\partial u} = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial u} = -\frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial y} = 1$ . При  $\alpha = \text{const}$  имеем  $F_1 = \sqrt{h} + \frac{\alpha u}{2}$ ,  $F_2 = \sqrt{h} - \frac{\alpha u}{2}$ . Представление в виде (35—37), с одной стороны, дает возможность определить  $h, u$  из

(32—33) или (35—36) и  $r$  из (34) или (37), а с другой стороны, поскольку первые две характеристики идут слева и справа, подсказывает форму и количество граничных условий (ГУ). Для левой границы ГУ определяются из условия симметрии в виде  $u = 0$ ,  $\frac{\partial \sqrt{h}}{\partial \xi} = 0$ . Последнее соотношение также вытекает из (19). Из (34) на левой границе определим  $r = 0$ . Особенная сложность заключается в задании ГУ для

границы нефтяного разлива (для простоты — правой границы). Для определения двух из трех величин  $u, \sqrt{h}, r$  используем уравнения (32) и (34). Для определения 3-й величины необходимо дополнительное соотношение. В качестве таковых используем выражения (13, 15, 17), полученные из автомодельных решений. Из этих выражений вытекает, что при численном решении задачи (32—34) на отдельных стадиях ФЭя (т. е. когда присутствуют только члены соответствующие рассматриваемой стадии) необходимо задавать различные граничные условия. На гравитационно-инерционной стадии ГУ имеет вид (считаем, что подбираемый параметр):

$$\frac{u}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h}, \quad (38)$$

на гравитационно-вязкой стадии ГУ задаем в виде

$$\frac{u^{1/3}}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h}, \quad (39)$$

для поверхностно-вязкой стадии определяем ГУ в виде

$$\frac{u^3}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h}. \quad (40)$$

ГУ в виде (38) применялось, например, в [17, 18], варианты (39, 40) рассматриваются впервые. Для решения задачи (32—34) построим сетку:  $\xi_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . На этой сетке будем определять все искомые переменные:  $h_i, u_i, r_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Обратим внимание, что в левой части (32—33) стоят производные от искомым функций  $u, \sqrt{h}$  в виде операторов переноса, поэтому аппроксимируем уравнения (32—33) по явной схеме с помощью направленных разностей. Введем аппроксимации:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + |\lambda| \frac{\partial F}{\partial \xi} \approx \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta \tau} + |\lambda|_L \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_L,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - |\lambda| \frac{\partial F}{\partial \xi} \approx \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta \tau} - |\lambda|_R \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_R,$$

где

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_L \approx \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta \xi}, \quad \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_R \approx \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta \xi},$$

$$|\lambda|_L = \frac{\sqrt{h_i}}{\alpha_i J_L}, \quad |\lambda|_R = \frac{\sqrt{h_i}}{\alpha_i J_R}, \quad J_L = \frac{r_i - r_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}}, \quad J_R = \frac{r_{i+1} - r_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}.$$

Комбинируя полученные разностные уравнения, во внутренних узлах  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ )

получаем:

$$2 \frac{\sqrt{h^{n+1}} - \sqrt{h}}{\Delta \tau} + \left[ |\lambda|_L \left( \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial \xi} \right)_L - |\lambda|_R \left( \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial \xi} \right)_R \right] + \frac{\alpha}{2} \left[ |\lambda|_L \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_L + |\lambda|_R \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_R \right] = -\frac{\sqrt{hu}}{r}, \quad (41)$$

$$\alpha \frac{u^{n+1} - u}{\Delta\tau} + \left[ |\lambda|_L \left( \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial\xi} \right)_L + |\lambda|_R \left( \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial\xi} \right)_R \right] + \frac{\alpha}{2} \left[ |\lambda|_L \left( \frac{\partial u}{\partial\xi} \right)_L - |\lambda|_R \left( \frac{\partial u}{\partial\xi} \right)_R \right] = -\frac{C_4}{hR^{1/2}} u^{3/2} \alpha. \quad (42)$$

Из (41—42) определяем  $u, \sqrt{h}$ , а  $r$  находим из (34) во внутренних узлах. На правой границе в узле  $\xi_N$  имеем:

$$\left( \frac{\sqrt{h^{n+1}} - \sqrt{h}}{\Delta\tau} + |\lambda| \left( \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial\xi} \right)_L \right) + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{u^{n+1} - u}{\Delta\tau} + |\lambda| \left( \frac{\partial u}{\partial\xi} \right)_L \right) = \left[ -\frac{\sqrt{hu}}{2r} - Fu^{n+1} \right], \quad (43)$$

где  $F = C_4 \frac{1}{hR^{1/2}} u^{1/2} \frac{\alpha}{2}$ . Уравнение (43) совместно с одним из ГУ (38—40) используется для определе-

ния  $u, \sqrt{h}$ . Тогда получаем на инерционно-гравитационной фазе:

$$\frac{u^{n+1}}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h^{n+1}},$$

$$\frac{u^{n+1}}{\sqrt{C_f}} + \left( \frac{\alpha}{2} + \Delta\tau F \right) u^{n+1} = \sqrt{h} + \frac{\alpha}{2} u - \Delta\tau \frac{\sqrt{hu}}{2r} - \Delta\tau |\lambda| \left( \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial\xi} \right)_L - \frac{\alpha}{2} \Delta\tau |\lambda| \left( \frac{\partial u}{\partial\xi} \right)_L; \quad (44)$$

на гравитационно-вязкой стадии:

$$\frac{(u^{n+1})^{1/3}}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h^{n+1}},$$

$$\frac{(u^{n+1})^{1/3}}{\sqrt{C_f}} + \left( \frac{\alpha}{2} + \Delta\tau F \right) u^{n+1} = \sqrt{h} + \frac{\alpha}{2} u - \Delta\tau \frac{\sqrt{hu}}{2r} - \Delta\tau |\lambda| \left( \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial\xi} \right)_L - \frac{\alpha}{2} \Delta\tau |\lambda| \left( \frac{\partial u}{\partial\xi} \right)_L; \quad (45)$$

на поверхностно-вязкой:

$$\frac{(u^{n+1})^3}{\sqrt{C_f}} = \sqrt{h^{n+1}},$$

$$\frac{(u^{n+1})^3}{\sqrt{C_f}} + \left( \frac{\alpha}{2} + \Delta\tau F \right) u^{n+1} = \sqrt{h} + \frac{\alpha}{2} u - \Delta\tau \frac{\sqrt{hu}}{2r} - \Delta\tau |\lambda| \left( \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial\xi} \right)_L - \frac{\alpha}{2} \Delta\tau |\lambda| \left( \frac{\partial u}{\partial\xi} \right)_L. \quad (46)$$

Из (44—46) определяем  $u$  и  $h$ , а  $r$  определяем из (34). На левой границе получаем ГУ в виде:

$$\frac{\sqrt{h_1^{n+1}} - \sqrt{h_0^{n+1}}}{\xi_1 - \xi_0} = 0, \quad u = 0, \quad r = 0. \quad (47)$$

На рис. 1—6 приведено сравнение численного решения, полученного на основе УрЧП с параметрами  $C_4 = 2.7$ ,  $C_5 = 2.3$ ,  $C_f = 1$  с решениями для радиуса разлива, полученными по формулам Фэя. На рис. 1 и 2 показаны численные решения для инерционно-гравитационной (без учета сил поверхностного натяжения и вязкости) и гравитационно-вязкой стадий (без учета силы поверхностного натяжения). На рис. 3 приведено численное решение на поверхностно-вязкой стадии (без учета гравитационной силы). Видно, что для автомодельных задач (стадий Фэя) решение совпадает с соответствующими фэевскими решениями после завершения начального периода адаптации (когда играет роль нестационарность).

Особая сложность возникает при решении полной задачи, поскольку для нее невозможно найти автомодельное решение и не известно ГУ. В этом случае задача решалась в едином алгоритме, с помощью переключения ГУ в определенные моменты времени. В начальный период при  $\tau < 90$  (время в безразмерных переменных) ГУ бралось по формуле (38), в промежуточный период — при  $90 < \tau < 900$  по формуле (39), на завершающей стадии — по (40). На рис. 4—6 приведено численное решение полной задачи. Видно (рис. 4), что в начальный период численное решение наиболее близко к формуле Фэя на инерционно-гравитационной фазе, в промежуточное время видна близость к фэевскому

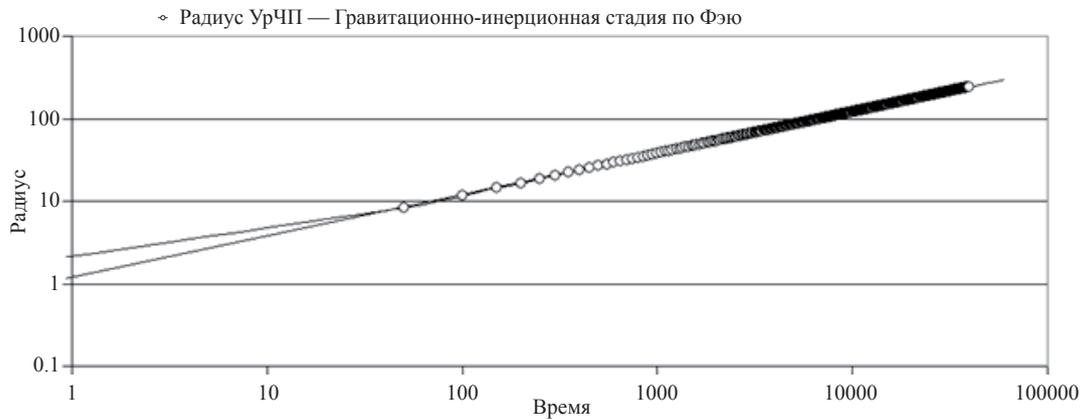


Рис. 1. Сравнение численного решения, полученного на основе УрЧП без учета сил поверхностного натяжения и вязкости с формулой Фэя на инерционно-гравитационной стадии (здесь и ниже радиус и время в безразмерных переменных).

Fig. 1. Comparison of the numerical solution obtained on the basis of the PDE without taking into account the surface tension and viscosity forces with the Fay's formula at the inertial-gravitational stage (here and below the radius and time in dimensionless variables).

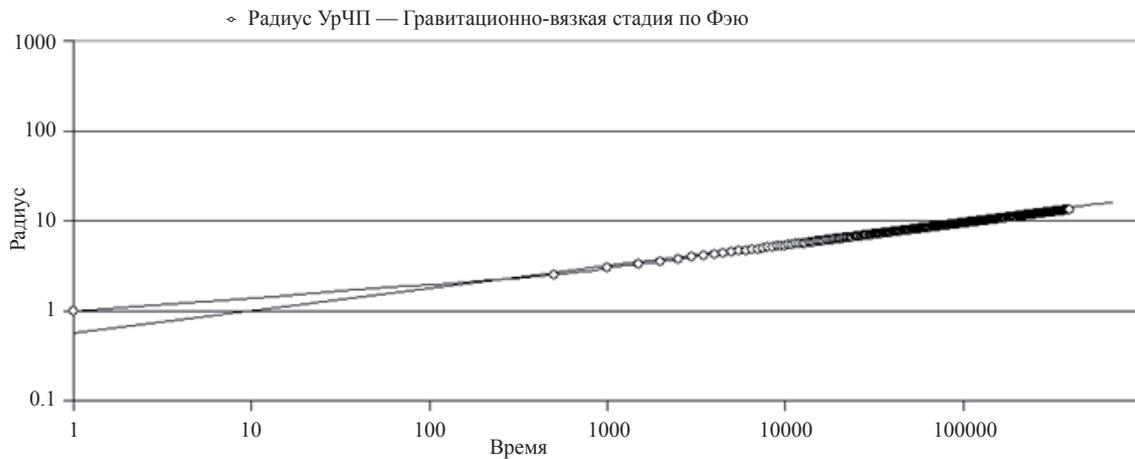


Рис. 2. Сравнение численного решения, полученного на основе УрЧП без учета силы поверхностного натяжения с формулой Фэя на гравитационно-вязкой стадии.

Fig. 2. Comparison of the numerical solution obtained on the basis of PDE without taking into account the surface tension force with the Fay's formula at the gravitational-viscous stage.



Рис. 3. Сравнение численного решения, полученного на основе УрЧП без учета силы гравитации с формулой Фэя для поверхностно-вязкой стадии.

Fig. 3. Comparison of the numerical solution obtained on the basis of PDE without taking into account the gravity force with the Fay's formula for the surface-viscous stage.

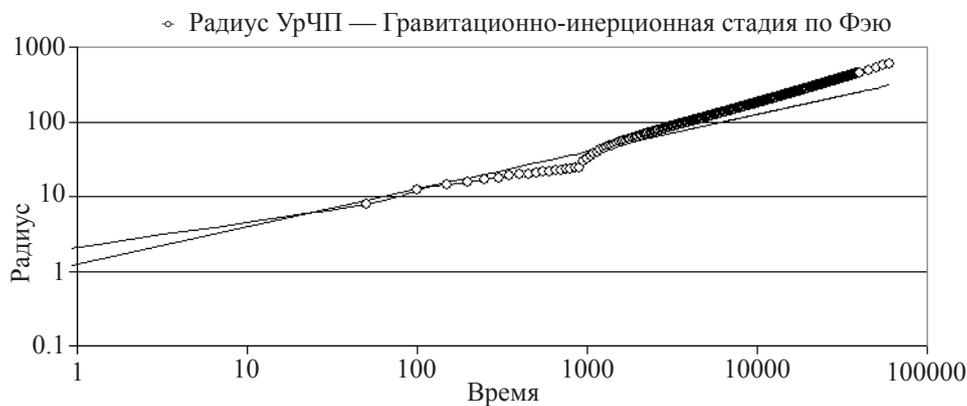


Рис. 4. Сравнение численного решения полной задачи, полученного на основе УрЧП с формулой Фэя для гравитационно-инерционной стадии.

Fig. 4. Comparison of the numerical solution of the full problem is obtained based on PDE with the Fay's formula for the gravitational-inertial phase.



Рис. 5. Сравнение численного решения полной задачи, полученного на основе УрЧП с формулой Фэя для гравитационно-вязкой стадии.

Fig. 5. Comparison of the numerical solution of the full problem is obtained based on PDEs with the formula for Fay's gravity-viscous phase.



Рис. 6. Сравнение численного решения полной задачи, полученного на основе УрЧП с формулой Фэя для поверхностно-вязкой стадии.

Fig. 6. Comparison of the numerical solution of the full problem based on PDEs with the Fay's formula for a surface-viscous stage.

решению на гравитационно-вязкой фазе и на финальной стадии видна близость к фэевскому решению на поверхностно-вязкой стадии. При этом полученное решение несколько теряет гладкость при изменении ГУ. Это особенно заметно при переходе от гравитационно-вязкой к поверхностно-вязкой стадии.

\*\*\*

В работе рассматривается задача растекания нефтяного разлива по поверхности моря на основе осесимметричной постановки уравнений в частных производных. Исследован вопрос определения ГУ для рассматриваемой постановки. Показано, что на разных стадиях Фэя требуются специфические ГУ для достижения совпадения с формулами Фэя. Для гравитационно-инерционной стадии ГУ совпадают с использованными, например в работах [17, 18], а на двух других стадиях предложены впервые. Построен метод численного решения на основе метода характеристик. Показано, что предложенный численный метод дает решение, согласованное с формулами Фэя на различных стадиях. Для решения полной задачи (в присутствии всех сил) предложен подход с переключением ГУ при переходе с одной стадии к другой.

### Литература

1. ASCE Task Committee on Modeling of Oil Spills. State-of-the-art review of modeling transport and fate of oil spills // Journal of Hydraulic Engineering. 1996. V. 122, N 11. P. 594—610.
2. Spaulding M. L. A State-of-the-art review of oil spill trajectory and fate modeling // Oil and Chemical Pollution. 1988. 4. P. 39—55.
3. Reed M., Johansen O., Per Johan Brandvik, Per Daling, Lewis Alun, Fiocco R., Don Mackay, Prentki R. Oil Spill Modeling towards the Close of the 20th Century: Overview of the State of the Art // Spill Science & Technology Bulletin. 1999. V. 5, N 1. P. 3—16.
4. Lehr W. J. Review of modeling procedures for oil spill weathering behavior // Adv. Ecol. Sci. 2001. V. 9. P. 51—90.
5. Fay J. A. The spread of oil slicks on a calm sea // Oil on the Sea. New York: Plenum Press, 1969. P. 53—63.
6. Fay J. A. Physical Processes in the Spread of Oil on a Water Surface // Proceedings of the Joint Conference on Prevention and Control of Oil Spills. Washington D. C., American Petroleum Institute, 1971. P. 463—467.
7. Scory S. Models used by the Belgian authorities in case of accidental spills at sea // Workshop on “Prediction of Short-Term Transport and Dispersion of Accidental Spills from Shipping and Off-Shore Industry”, Hague, Netherlands, 15—17 November 1995. 5 p.
8. Kuipers H. D. A simulation model for oil slicks at sea (SMOSS) // Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, North Sea Directorate, National Department of Public Works, Ministry of Transport and Public Works, Rijswijk, Delft, The Netherlands, 1981, 79 p.
9. Kochergin I. E., Bogdanovsky A. A., Budaeva V. D., Makarov V. G., Mishukov V. F., Ovsienko S. N., Putov V. F., Reitsema L. A., Sciallabba J. W., Sergusheva O. O., Yarosh P. V. Modeling of oil spills for the shelf conditions of North-Eastern Sakhalin // Proc. 2nd Workshop on the Okhotsk Sea and Adjacent Areas, Canada, 1999. P. 123—130.
10. Antunes do Carmo I. J., Pinho J. L., Vieira J. P. Oil Spills in Coastal Zones: Predicting Slick Transport and Weathering // The Open Ocean Engineering Journal. 2010. 3. P. 129—142.
11. Архинов Б. В., Шапочкин Д. А. Распространение нефтяных разливов в море // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 6. С. 39—59.
12. Бровченко И. А., Мадерич В. С. Численный Лагранжевый метод моделирования распространения поверхностных пятен нефти // Прикладна гідромеханіка. 2002. Т. 4(76), № 4. С. 23—31.
13. Maderich V., Brovchenko I., Jung K. Oil Spreading in instantaneous and continuous spills on rotational Earth // Envir Fluid Mechanics. 2012. P. 361—378.
14. Ovsienko S., Zatsepa S., Ivchenko A. Study and Modelling of Behavior and Spreading of Oil in Cold Water and in Ice Conditions // Poac 99, Proceedings. 1999. V. 2. P. 848—857.
15. Архинов Б. В., Пархоменко В. А., Солбаков В. В., Шапочкин Д. А. Математическое моделирование распространения нефтяных разливов в морской среде. М.: ВЦРАН, 2001. 53 с.
16. Arkhipov B., Koterov V., Solbakov V., Shapochkin D., Yurezanskaya Y. Numerical Modeling of Pollutant Dispersion and Oil Spreading by the Stochastic Discrete Particles Method // Studies in Applied Mathematics. 2007. 120 (1). P. 87—104.
17. Hoult D. P. Oil spreading on the sea // Annual Review of Fluid Mechanics. 1986. V. 4. P. 341—368.
18. Marius Ungarish. An introduction to gravity currents and intrusions. Department of Computer Science Technion. Israel Institute of Technology Haifa. Israel. CRC Press. A Chapman and Hall Book. 2009. 489 p.
19. Friedrichs K. O. On the derivation of the shallow water theory // Comm. Pure and Appl. Math. 1948. V. 1. P. 81—85.
20. Harkins W. D. The physical chemistry of surface films. New York: Reinhold, 1952. 163 p.
21. Foda M., Cox R. G. The spreading of thin liquid films on a water-air interface // J. Fluid Mech. 1980. V. 101 (1). P. 33—51.
22. Loytsiansky L. G. Mechanics of fluid and gas. Second Revised Edition, Pergamon Press, 2014. 688 p.
23. Sedov L. I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. 10-th ed. CRC Press, 1993. 493 p.