

УДК 551.55

© Л. Х. Ингель<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>ФГБУ «НПО «Тайфун», 249038, ул. Победы, 4, г. Обнинск, Россия

<sup>2</sup>Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, 119017, Пыжевский пер., 3, г. Москва, Россия

\*E-mail: lev.ingel@gmail.com

## ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ЭКМАНОВСКОГО ТИПА НАД АНИЗОТРОПНОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Статья поступила в редакцию 18.09.2020, после доработки 27.11.2020

Исследованию пограничного слоя атмосферы над неоднородной подстилающей поверхностью посвящена обширная литература. Но в гораздо меньшей степени исследована специфика анизотропных пограничных слоев, когда эффективная шероховатость и коэффициент сопротивления зависят от направления ветра. Такие ситуации, помимо случаев анизотропного рельефа, существуют, например, при взаимодействии ветра с упорядоченной растительностью (лесопосадки) или упорядоченной застройкой. Известны факты анизотропии сопротивления над взволнованной морской поверхностью. В настоящей заметке рассматривается стационарная нелинейная аналитическая модель пограничного слоя экмановского типа при анизотропном сопротивлении. Результаты показывают, что эффекты анизотропии могут быть заметными.

**Ключевые слова:** пограничный слой атмосферы, подстилающая поверхность, анизотропное сопротивление, нелинейное трение, аналитическая модель, поворот ветра.

© L. Kh. Ingel<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Research and Production Association “Typhoon”, 249038, Pobedy Str., 4, Obninsk, Russia

<sup>2</sup>Obukhov Institute of Atmospheric Physics, RAS, 119017, Pyzhevsky Per., 3, Moscow, Russia

\*E-mail: lev.ingel@gmail.com

## EKMAN-TYPE BOUNDARY LAYER OVER THE ANISOTROPIC UNDERLYING SURFACE

Received 18.09.2020, in final form 27.11.2020

An extensive literature is devoted to the study of the boundary layer of the atmosphere over an inhomogeneous underlying surface. However, the specificity of anisotropic boundary layers, when the effective roughness and drag coefficient depend on the wind direction, has been studied to a much lesser extent. Such situations, in addition to cases of anisotropic relief, exist, for example, when the wind interacts with ordered vegetation (forest plantations) or ordered buildings. There are known facts of anisotropy of resistance over a rough sea surface. In this note, we consider a stationary nonlinear analytical model of the Ekman-type boundary layer with anisotropic resistance. The results show that the effects of anisotropy can be noticeable.

**Key words:** atmospheric boundary layer, underlying surface, anisotropic resistance, nonlinear friction, analytical model, wind turn.

### 1. Введение

Исследованию пограничного слоя атмосферы над неоднородной подстилающей поверхностью посвящена обширная литература (см., например, [1–3] и библиографию в этих изданиях). Но, насколько нам известно, в гораздо меньшей степени исследована специфика анизотропных пограничных слоев, когда эффективная шероховатость и коэффициент сопротивления  $C_D$  зависят от направления ветра. Такие ситуации, помимо случаев анизотропного рельефа, существуют, например, при взаимодействии ветра с упорядоченной растительностью (лесопосадки) или упорядоченной застройкой. Если же растительность распределена равномерно и изотропно, то достаточно сильный ветер деформирует ее (наклоняет крону деревьев, кустов), так что появляется выделенное направление, поэтому шероховатость и в этом случае становится анизотропной. Анизотропными могут быть также большие массивы ветроэнергетических установок [4] (в зависимости от их

Ссылка для цитирования: Ингель Л.Х. Пограничный слой экмановского типа над анизотропной подстилающей поверхностью // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2021. Т. 14, № 1. С. 63–66. doi: 10.7868/S2073667321010068

For citation: Ingel L. Kh. Ekman-Type Boundary Layer Over the Anisotropic Underlying Surface. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2021, 14, 1, 63–66. doi: 10.7868/S2073667321010068

геометрии). В работе [5] описываются ситуации с анизотропией коэффициента сопротивления над взволнованной морской поверхностью. В настоящей заметке рассматривается стационарная нелинейная аналитическая модель пограничного слоя экмановского типа при анизотропном сопротивлении.

## 2. Аналитическая модель

Воспользуемся моделью с квадратичным трением на нижней границе  $z = 0$  [6–8]. В такого типа моделях предполагается, что уровень  $z = 0$  соответствует не подстилающей поверхности, а, например, верхней границе приземного (приводного) слоя или уровню стандартных метеорологических наблюдений. Обобщая постановку задачи [7, 8] на случай анизотропного трения, стационарную систему уравнений и краевые условия записываем в виде

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + fv = 0, \quad K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0, \quad (1)$$

$$K \frac{\partial u}{\partial z} = C_{Dx} u (u^2 + v^2)^{1/2}, \quad K \frac{\partial v}{\partial z} = C_{Dy} v (u^2 + v^2)^{1/2} \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Здесь  $u, v$  — составляющие горизонтальной скорости,  $u_g$  — геострофический ветер,  $f$  — параметр Кориолиса,  $K$  — коэффициент турбулентной вязкости. Коэффициенты сопротивления  $C_{Dx}, C_{Dy}$ , вообще говоря, могут заметно различаться, поскольку может сильно различаться эффективная шероховатость, например, для ветров, направленных вдоль лесопосадок и в поперечном направлении.

Решение может быть записано в виде

$$u = u_g \left[ 1 + \left( Y \sin \frac{z}{h} - X \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left( -\frac{z}{h} \right) \right], \quad (4)$$

$$v = u_g \left( X \sin \frac{z}{h} + Y \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left( -\frac{z}{h} \right).$$

Здесь  $h = (2K/f)^{1/2}$ ;  $X, Y$  — постоянные интегрирования, которые, с учетом нижних граничных условий, должны удовлетворять нелинейной алгебраической системе уравнений

$$J_x (X + Y) = (1 - X) \left[ (1 - X)^2 + Y^2 \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$J_y (X - Y) = Y \left[ (1 - X)^2 + Y^2 \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где введены обозначения для двух безразмерных параметров  $J_x = (fK/2)^{1/2} / (C_{Dx} |u_g|)$ ,  $J_y = (fK/2)^{1/2} / (C_{Dy} |u_g|)$ .

Разделив одно из последних уравнений на другое, получим

$$A \frac{(X + Y)}{X - Y} = \frac{(1 - X)}{Y} \quad (7)$$

или

$$AY^2 + [(A - 1)X + 1]Y + X^2 - X = 0, \quad (8)$$

где  $A \equiv J_x / J_y = C_{Dy} / C_{Dx}$  — безразмерный фактор анизотропии.

Из общей теории кривых 2-го порядка (конических сечений) нетрудно убедиться, что геометрическое место точек на плоскости  $XY$ , соответствующих (8), при не слишком сильной анизотропии  $3 - \sqrt{8} < A < 3 + \sqrt{8}$  представляет собой эллипс, пересекающий ось  $X$  в точках  $X = 0$  и  $X = 1$  (при отсутствии анизотропии ( $A = 1$ ) — окружность). Из (8) можно выразить  $Y$ :

$$Y = \frac{-[(A - 1)X + 1] \pm \left\{ [(A - 1)X + 1]^2 + 4AX(1 - X) \right\}^{1/2}}{2A}. \quad (9)$$

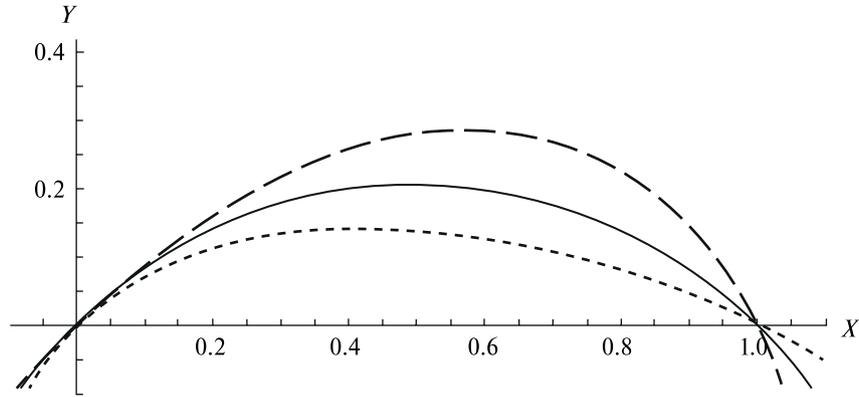


Рис. 1. Верхние фрагменты зависимостей  $Y(X)$  при значениях  $A \equiv C_{Dy}/C_{Dx} = 1/2, 1, 2$  (верхняя, средняя и нижняя кривые соответственно).

Fig. 1. Upper fragments of dependencies  $Y(X)$  at values  $A \equiv C_{Dy}/C_{Dx} = 1/2, 1, 2$  (upper, middle and lower curves, respectively).

Нетрудно убедиться, что физический интерес представляет лишь часть кривой  $Y(X)$ , находящаяся в первом квадранте, поэтому, в (9) следует выбрать положительный знак и рассматривать решение в области  $0 \leq X \leq 1$ . На рис. 1 представлены соответствующие фрагменты зависимостей  $Y(X)$  для различных значений параметра анизотропии. Точка  $(1, 0)$  соответствует нулевым значениям параметров  $J_{x,y}$  — условиям прилипания. Точка  $(0, 0)$  — бесконечным значениям этих параметров — условиям скольжения. Как нетрудно проверить, в последней точке  $dY/dX = 1$  при любых значениях  $A$ . Отсюда видно, что все кривые находятся ниже прямой  $Y = X$ , т. е. разность  $X - Y$  и левая часть (6) всегда неотрицательны. Поэтому не может быть отрицательной и правая часть (6), т. е. величина  $Y$ . Это и доказывает то, что интерес представляет лишь верхние фрагменты кривых  $Y(X)$ , находящиеся в первом квадранте.

Если пользоваться термином «мезошероховатость» (поясненном, например, в [3]), эта величина, согласно [3], может, вообще говоря, меняться более, чем на порядок. На рис. 1 и в приведенных ниже оценках рассматривается относительно умеренная анизотропия коэффициента сопротивления с параметром  $A$ , отличающимся от единицы в два раза в ту или иную сторону.

Нижняя кривая на рис. 1 отвечает случаю  $C_{Dx}/C_{Dy} = 1/2$ . В этом случае сопротивление в направлении вдоль геострофического потока относительно слабое, поэтому агеострофичность у поверхности (значение  $Y$ ) относительно мала. В противоположном случае (верхняя кривая) геострофический поток встречает относительно сильное сопротивление, что приводит к большей агеострофичности. Это проявляется и на рис. 2, где представлены зависимости углов поворота приземного ветра  $\varphi = \arctg[Y/(1 - X)]$  для кривых, изображенных на рис. 1.

При реальных значениях параметров значения  $J_x, J_y$ , как нетрудно проверить, обычно порядка единицы [7, 8] (в точности равны единице, например, при  $K = 2 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $C_{Dx} = C_{Dy} = 10^{-3}$ ,  $u_g = 10 \text{ м/с}$ ). Приведем численные примеры. При  $J_x = J_y = 1$

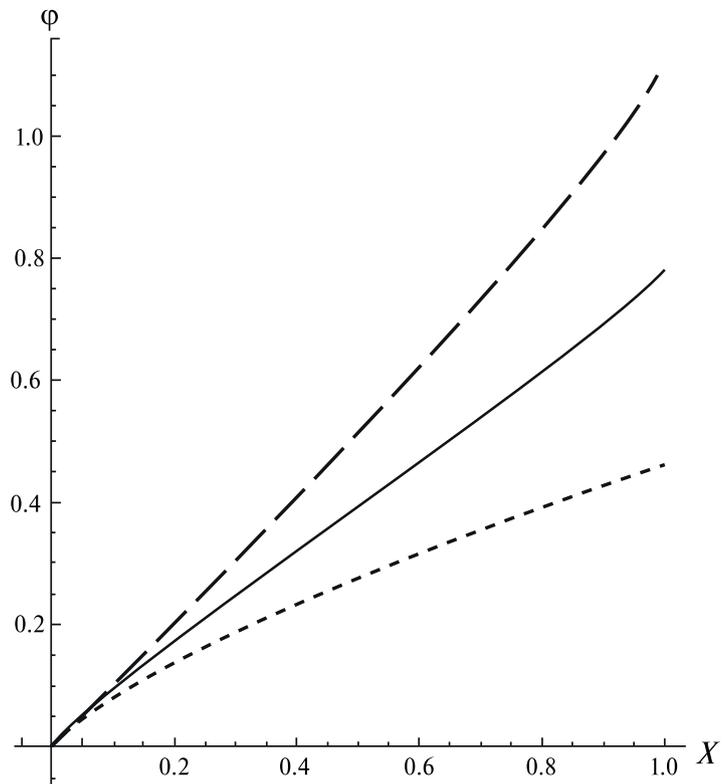


Рис. 2. Углы поворота приземного ветра (в радианах) для кривых, изображенных на рис. 1.

Fig. 2. Surface wind rotation angles (in radians) for the curves shown in fig. 1.

(отсутствие анизотропии,  $A = 1$ )  $X \approx 0.31$ ,  $Y \approx 0.18$ ,  $\varphi \approx 15^\circ$ . При  $J_x = 0.7$ ,  $J_y = 1.4$  получаем  $A = 0.5$ ,  $X \approx 0.37$ ,  $Y \approx 0.25$ ,  $\varphi \approx 21^\circ$ . При  $J_x = 1.4$ ,  $J_y = 0.7$  получаем  $A = 2$ ,  $X \approx 0.26$ ,  $Y \approx 0.13$ ,  $\varphi \approx 10^\circ$ . Видно, что анизотропия сопротивления может существенно влиять на значения коэффициентов  $X$ ,  $Y$  и углы поворота ветра. Отметим универсальный характер кривых на рис. 1, 2, зависящих только от параметра  $A = C_{Dy}/C_{Dx}$ .

### 3. Заключение

Аналитическая модель пограничного слоя с анизотропным сопротивлением представлена, насколько нам известно, впервые. Конечно, это — весьма упрощенная модель, но представляется, что подобные модели являются необходимым этапом развития теории. Они необходимы, прежде всего, для понимания динамики и структуры пограничного слоя и могут служить в качестве тестовых примеров при разработке более совершенных моделей.

### Литература

1. Kaimal J.C., Finnigan J.J. Atmospheric boundary layer flows: their structure and measurement. Oxford: Oxford University Press, 1994. 304 p.
2. Lee X. Fundamentals of boundary-layer meteorology. Springer, 2018. 256 p.
3. Бызова Н.Л. О профилях ветра и мезошероховатости над неоднородной подстилающей поверхностью. Труды ИЭМ. 1987. Вып. 41(126). С. 61–70.
4. Emeis S. Wind energy meteorology. Atmospheric physics for wind power generation wind energy. Springer, 2018. 255 p.
5. Репина И.А., Артамонов А.Ю., Варенцов М.И., Козырев А.В. Экспериментальное исследование коэффициента сопротивления морской поверхности при сильных ветрах // Морской гидрофизический журнал. 2015. № 1. С. 53–61.
6. Галушко В.В., Орданович А.Е. Двухслойная модель экмановского пограничного слоя атмосферы // Метеорология и гидрология. 1978. № 4. С. 33–34.
7. Ингель Л.Х., Михайлова Л.А. К теории экмановского пограничного слоя с нелинейными граничными условиями // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 7. С. 675–681.
8. Ingel L. Kh. On the nonlinear dynamics of the boundary layer of intense atmospheric vortex // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 2005. V. 40, N 4. P. 295–304.

### References

1. Kaimal J.C., Finnigan J.J. Atmospheric Boundary Layer Flows: Their Structure and Measurement. Oxford, Oxford University Press, 1994. 304 p.
2. Lee X. Fundamentals of Boundary-Layer Meteorology. Cham, Springer, 2018. 256 p.
3. Byzova N.L. On the profiles of wind and meso-roughness over an inhomogeneous underlying surface. Trudy IEM. 1987, 41(126), 61–70 (in Russian).
4. Emeis S. Wind energy meteorology. Atmospheric physics for wind power generation wind energy. Cham, Springer, 2018. 255 p.
5. Repina I.A., Artamonov A. Yu., Varentsov M.I., Kozыrev A.V. Experimental study of high wind sea surface drag coefficient. Physical Oceanography. 2015, 1, 49–58. doi: 10.22449/1573–160X-2015–1–49–58
6. Galushko V.V., Ordanovich A.E. Two-layer model of the Ekman atmospheric boundary layer. Russ. Meteorol. Hydrol. 1978, 4, 33–34.
7. Ingel L. Kh., Mikhaylova L.A. Theory of the Ekman boundary layer with nonlinear boundary conditions. Izvestiya, Atmos and Oceanic Phys. 1990, 26, 7, 499–503.
8. Ingel L. Kh. On the nonlinear dynamics of the boundary layer of intense atmospheric vortex. Dyn. Atmos. Oceans. 2005, 40, 4, 295–304.